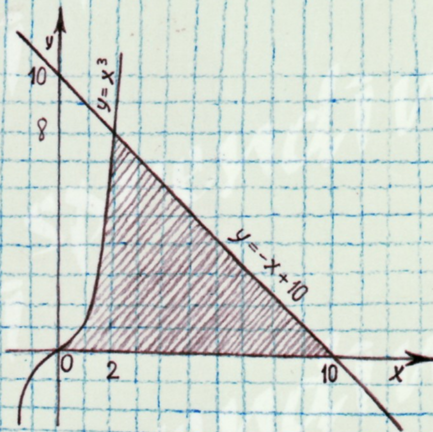
Eglė Danielienė, Aldona Janulevičienė, Daiva Noreikienė

Matematikos kontroliniai darbai su sprendimais

12 KLASĖ

1 dalis



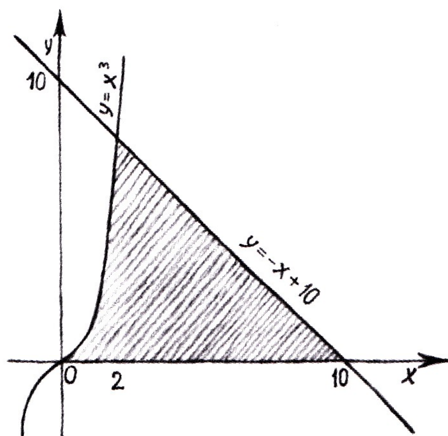
$$S=\int_0^2 x^3\,dx+\int_2^{10}(-x+10)\,dx=\frac{x^4}{4}\Big|_0^2+\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_2^{10}+10x\Big|_2^{10}=$$

$$=\frac{2^4}{4}-\frac{10^2}{2}+\frac{2^2}{2}+100-20=36\ \text{kv. v.}$$

Atsakymas. 36 kv. v.

Eglė Danielienė, Aldona Janulevičienė, Daiva Noreikienė

Matematikos kontroliniai darbai su sprendimais



12 KLASĖ

1 dalis

TEV
VILNIUS 2006

UDK 51(076)
Da238

Darbo vadovas *Valdas Vanagas*

Redaktoriai: *Juozas Mačys*, *Žydrūnė Stundžienė*

Programinė įranga: *Rolandas Jakštys*

Kompiuterinė grafika: *Edita Tatarinavičiūtė*

Tekstą kompiuteriu rinko ir maketavo *Nijolė Drazdauskienė*

Konsultantas *Elmundas Žalys*

Recenzavo Matematikos ir informatikos institutas

Leidyklos TEV interneto svetainė www.tev.lt

ISBN 9955-680-49-0

PRATARMĖ

Ši kontrolinių darbų knygelė skirta 11, 12 klasių mokytojams, taip pat mokiniams, pasirinkusiems išplėstinį matematikos kursą bei norintiems geriau pasiruošti kontroliniams darbams ir brandos egzaminui.

Kontrolinių darbų užduotys sudarytos pagal vadovėlio „Matematika 12“ (Leidykla TEV, 2003 m.) pirmąją dalį.

Leidinyje yra 10 kontrolinių darbų, kuriuose sunkėjimo tvarka pateikiama po kelias užduotis. Paskutinė kiekvieno kontrolinio darbo užduotis skiriama kurso kartojimui.

Kiekvieno kontrolinio darbo yra du variantai. Pirmasis variantas pateiktas su sprendimais, paaiškinimais ir atsakymais. Prie uždavinių sprendimų kai kur rasite stačiakampiuose įrėmintus svarbiausius teorinius faktus, susijusius su sprendžiamu uždaviniu. Analogiškas antrasis variantas skirtas pasitikrinti mokiniams, kaip jie suprato pirmojo varianto užduotis, — jo duoti tik atsakymai knygelės gale. Beje, knygelės gale pateikiami ir pirmojo varianto uždavinių atsakymai, todėl mokinys gali neskaityti sprendimų, o tik pasitikrinti atsakymo teisingumą.

Knygelė naudinga ir matematikos mokytojams organizuojant mokymo procesą, tikrinant mokinių žinias. Parinkdamas uždavinius pagal sudėtingumo laipsnį, mokytojas visą mokymo procesą gali individualizuoti.

Knygele galima naudotis einant kursą, kartojant išeitą medžiagą, ruošiantis kontroliniam darbui ar egzaminui.

Visi knygelėje pateikti uždaviniai atitinka standartų ir programų reikalavimus.
Uždavinių sąlygas, sprendimus bei atsakymus patikrino leidyklos TEV specialistai.

Autorės

TURINYS

INTEGRALAI

TIKIMYBĖS

Ribos

K1 (1.1–1.3)

1. Apskaičiuokite funkcijos ribą.

a) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{3x^2-7x+15}{x+5}$;

b) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-4}$;

c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$.

2. Nurodykite funkcijos tolydumo intervalus.

a) $f(x)=\frac{x^3-3x}{x-1}$;

b) $f(x)=\sqrt{4-x^2}$;

c) $f(x)=\lg\left(1-\sqrt{x^2-4x+3}\right)$.

3. Nubraižykite funkcijos

$$f(x)=-\frac{1}{3}x+2$$

grafiką. Raskite funkcijos reikšmės $f(x_0)$ pokytį $\Delta f(x_0)$, kai argumento $x_0=0$ pokytis $\Delta x=0{,}3$. Pavaizduokite tai brėžiniu.

4. Raskite $f(-2)$ ir $f\left(\frac{x}{3}-1\right)$, kai $f(x)=(x+1)^4$.

5. Nubraižykite funkcijos grafiką.

a) $f(x)=\frac{x^2-9x+14}{x-2}$;

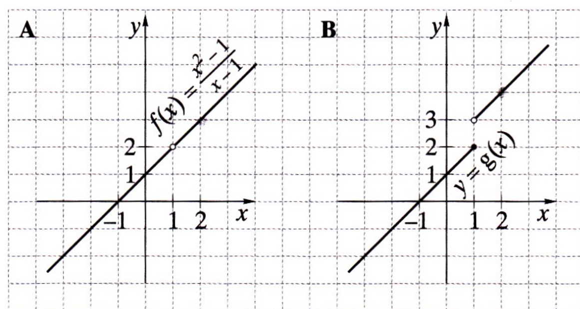
b) $f(x)=\begin{cases}-x^2+1, & \text{kai } x<1,\\ x-1, & \text{kai } x\geqslant 1.\end{cases}$

6. Brėžiniuose **A** ir **B** pavaizduoti funkcijų $y=f(x)$ ir $y=g(x)$ grafikai.

a) Raskite: $f(2)$, $g(2)$, $f(1)$, $g(1)$.

b) Raskite funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ ribas taške $x=2$.

c) Raskite funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ ribas taške $x=1$.



7. Išspręskite nelygybę.

a) $\frac{(x+3)(2x-7)(x-1)}{2x+5}\geqslant 0$;

b) $\frac{(x-3)(x+1)^2(x-2)^3}{x^2-9}<0$;

c) $\frac{1}{x+2}+\frac{2}{x+3}\leqslant\frac{3}{x+4}$;

d) $\sqrt{x^2-16}\cdot(x+3)<0$.

1. Apskaičiuokite funkcijos ribą.
   a) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{3x^2-7x+15}{x+3}$;
   b) $\lim\limits_{x\to3}\frac{2x^2+x-21}{x^2-9}$;
   c) $\lim\limits_{x\to-3}\left(\frac{x^2-9}{\sqrt{x+7}-2}-2x^2\right)$.

2. Nurodykite funkcijos tolydumo intervalus.
   a) $f(x)=\frac{x^3-x}{x^2+1}$;
   b) $f(x)=\sqrt{-2x^2+3x+9}$;
   c) $f(x)=\lg\left(2-\sqrt{x^2-7}\right)$.

3. Nubraižykite funkcijos

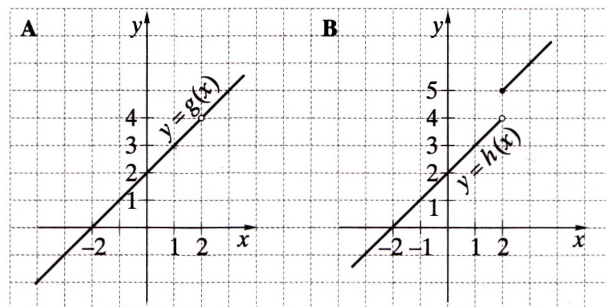
   $f(x)=2x-4$

   grafiką. Funkcijos reikšmių pokytį taške x_0 išreikškite skaičiumi x_0 ir argumento pokyčiu Δx. Raskite $\Delta f(3)$, kai $\Delta x=0{,}1$. Pavaizduokite tai brėžiniu.

4. Raskite $f(2)$ ir $f\left(\frac{x}{2}+1\right)$, kai $f(x)=(x-1)^3$.

5. Nubraižykite funkcijos grafiką.
   a) $f(x)=\frac{x^2-10x+21}{x-3}$;
   b) $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{kai } x\geqslant 0,\\ -x^2, & \text{kai } x<0.\end{cases}$

6. Brėžiniuose **A** ir **B** pavaizduoti funkcijų $y=g(x)$ ir $y=h(x)$ grafikai.
   a) Raskite funkcijų reikšmes taškuose $x=1$ ir $x=2$.
   b) Raskite funkcijų $g(x)$ ir $h(x)$ ribas taške $x=1$.
   c) Raskite funkcijų $g(x)$ ir $h(x)$ ribas taške $x=2$.



7. Išspręskite nelygybę.
   a) $\frac{(x+4)(2x-9)}{(x-6)(2x+3)}\leqslant 0$;
   b) $\frac{(x-2)(2+x)^2(x-7)^3}{x^2-16}<0$;
   c) $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x-3}>\frac{3}{x-4}$;
   d) $(x^2-9)\cdot\sqrt{x-2}<0$.

Ribos

K1 (1.1–1.3)

1.

Jei tolydžiosios funkcijos $f(x)$ reikšmė, kai $x = a$, yra lygi A, t. y. $f(a) = A$, tai funkcijos $f(x)$ *riba*, kai x artėja prie a, yra lygi A.

Rašoma:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Jei reiškinys $f(x)$ yra neapibrėžtas, kai $x = a$, tai skaičiuojant funkcijos $y = f(x)$ ribą, kai x artėja prie a, dažnai pavyksta ekvivalenčiai (kai $x \neq a$) pertvarkyti reiškinį $f(x)$ taip, kad taške $x = a$ jis būtų apibrėžtas (turėtų prasmę).

1a. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{3x^2-7x+15}{x+5}$.

Kadangi reiškinys $\frac{3x^2-7x+15}{x+5}$ taške $x = -2$ yra apibrėžtas (tai akivaizdu, nes vardiklis $x+5 \neq 0$, kai $x = -2$), tai ribą rasime apskaičiavę funkcijos $f(x) = \frac{3x^2-7x+15}{x+5}$ reikšmę taške $x = -2$:

$$\lim_{x \to -2} \frac{3x^2 - 7x + 15}{x + 5} = \frac{3 \cdot (-2)^2 - 7 \cdot (-2) + 15}{-2 + 5} = \frac{12 + 14 + 15}{3} = \frac{41}{3} = 13\frac{2}{3}.$$

1b. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{2x^2+x-10}{x^2-4}$.

Taške $x = 2$ trupmena $\frac{2x^2+x-10}{x^2-4}$ neturi prasmės, nes vardiklis $x^2 - 4$ su šia x reikšme lygus 0. Pertvarkykime trupmeną, jos skaitiklį ir vardiklį išskaidę dauginamaisiais — tikimės, kad skaitiklyje ir vardiklyje bus vienodų dauginamųjų ($x-2$ — o taip greičiausiai ir bus, — prisiminkime Vijeto teoremą), kuriuos suprastinę gausime reiškinį, apibrėžtą taške $x = 2$.
Vardiklį skaidome dauginamaisiais:

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x - 2)(x + 2).$$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$; čia x_1 ir x_2 — kvadratinės lygties
$ax^2 + bx + c = 0$ sprendiniai.

Skaitiklį skaidome dauginamaisiais. Randame kvadratinio trinario $2x^2 + x - 10$ šaknis, t. y. tas x reikšmes, su kuriomis trinaris lygus 0:

$$2x^2 + x - 10 = 0, \qquad D = 1^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-10) = 1 + 80 = 81,$$
$$x_1 = \frac{-1 + 9}{2 \cdot 2} = 2, \qquad x_2 = \frac{-1 - 9}{4} = -2{,}5.$$

Taigi

$$2x^2 + x - 10 = 2 \cdot (x - 2) \cdot (x + 2{,}5).$$

Turime:

$$\frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 4} = \frac{2(x - 2)(x + 2{,}5)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{2x + 5}{x + 2}.$$

Skaičiuojame ribą:

$$\lim_{x\to2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{2x+5}{x+2}=\frac{2\cdot2+5}{2+2}=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}.$$

1c. $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$.

Matome, kad kai $x=2$, tai vardiklis $x-2=0$.
Pertvarkome reiškinį

$$\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}.$$

Čia skaitiklio dauginamaisiais neišskaidysi. Pabandykime skaitiklį ir vardiklį padauginti iš tokio reiškinio, kad skaitiklyje išnyktų šaknis (Vijeto teorema mums pašnabžda, kad tada turėtų atsirasti daugiklis $x-2$). Ji dings, jei dauginsime iš reiškinio $\sqrt{x+7}+3$.
Dauginame:

$$\frac{(\sqrt{x+7}-3)\cdot(\sqrt{x+7}+3)}{(x-2)\cdot(\sqrt{x+7}+3)}=\frac{(\sqrt{x+7})^2-3^2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}=\frac{x+7-9}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}=$$
$$=\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}=\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}.$$

Skaičiuojame ribą:

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{1}{\sqrt{x+7}+3}=\frac{1}{\sqrt{2+7}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}.$$

Atsakymas. a) $13\frac{2}{3}$; b) $2\frac{1}{4}$; c) $\frac{1}{6}$.

2.

> Ieškodami elementarių („mokyklinių“) funkcijų $f(x)$ tolydumo intervalų, ieškome funkcijos apibrėžimo srities, t. y. tų x reikšmių, su kuriomis reiškinys $f(x)$ turi prasmę.

2a. $f(x)=\frac{x^3-3x}{x-1}$.

> Trupmena $\frac{a}{b}$ neturi prasmės, kai vardiklis $b=0$.

Matome, kad reiškinys

$$\frac{x^3-3x}{x-1}$$

turi prasmę su visomis x reikšmėmis, išskyrus $x=1$, nes su šia x reikšme vardiklis $x-1=0$. Vadinasi, funkcijos apibrėžimo sritis $x\in(-\infty;\,1)\cup(1;\,+\infty)$.

Atsakymas. Funkcija tolydi intervaluose $(-\infty;\,1)$ ir $(1;\,+\infty)$.

2b. $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

Lyginio laipsnio šaknis $\sqrt[2n]{a}$, $n \in \boldsymbol{N}$, turi prasmę, kai pošaknis neneigiamas: $a \geqslant 0$.

Reiškinys

$$\sqrt{4 - x^2}$$

neturi prasmės, kai pošaknis yra neigiamas. Raskime tas x reikšmes, su kuriomis pošaknis neneigiamas.

Sprendžiame nelygybę:

$$4 - x^2 \geqslant 0,$$

$$x^2 - 4 \leqslant 0, \quad (x - 2)(x + 2) \leqslant 0.$$



$$4 - x^2 \geqslant 0, \quad \text{kai} \quad x \in [-2; 2].$$

Atsakymas. Funkcija tolydi intervale $[-2; 2]$.

2c. $f(x) = \lg\left(1 - \sqrt{x^2 - 4x + 3}\right)$.

Logaritmas $\log_b a$ turi prasmę, kai pologaritminis reiškinys yra didesnis už 0, o logaritmo pagrindas yra didesnis už 0 ir nelygus 1, t. y.: $a > 0, \quad b > 0, \quad b \neq 1.$

Duotojo logaritmo pagrindas lygus 10, taigi reikia rasti tik tas x reikšmes, su kuriomis pologaritminis reiškinys didesnis už 0:

$$1 - \sqrt{x^2 - 4x + 3} > 0.$$

Sprendžiame iracionaliąją nelygybę:

$$\sqrt{x^2 - 4x + 3} < 1.$$

Užtenka nagrinėti tik tas x reikšmes, su kuriomis $x^2 - 4x + 3 \geqslant 0$. Su tomis reikšmėmis abi nelygybės pusės yra *neneigiamos*, todėl galime kelti kvadratu ir naikinti šaknį. Gauname nelygybių sistemą:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geqslant 0, \\ \sqrt{x^2 - 4x + 3} < 1 \mid \uparrow^2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 3 \geqslant 0, \\ x^2 - 4x + 3 < 1. \end{cases}$$

Sprendžiame pirmąją nelygybę. Kvadratinį trinarį $x^2 - 4x + 3$ išskaidome dauginamaisiais:

$$x^2 - 4x + 3 = 0, \qquad D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4,$$

$$x_1 = \frac{4 + 2}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{4 - 2}{2} = 1;$$

$$x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1).$$

Gauname ekvivalenčią pradinei (sistemos pirmajai nelygybei) nelygybę:

$(x-3)(x-1) \geqslant 0,$

$x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty).$

Sprendžiame antrąją sistemos nelygybę:

$x^2 - 4x + 3 < 1, \quad x^2 - 4x + 2 < 0.$

Kvadratinį trinarį $x^2 - 4x + 2$ skaidome dauginamaisiais:

$$x^2 - 4x + 2 = 0, \quad D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 16 - 8 = 8,$$

$$x_1 = \frac{4+\sqrt{8}}{2} = \frac{4+2\sqrt{2}}{2} = 2+\sqrt{2},$$

$$x_2 = \frac{4-\sqrt{8}}{2} = 2-\sqrt{2};$$

$$x^2 - 4x + 2 = \left(x-(2+\sqrt{2})\right)\left(x-(2-\sqrt{2})\right),$$

$$\left(x-(2+\sqrt{2})\right)\left(x-(2-\sqrt{2})\right) < 0,$$

$$x \in \left(2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}\right).$$

Gavome:

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty), \\ x \in \left(2-\sqrt{2}; 2+\sqrt{2}\right). \end{cases}$$

Belieka nustatyti bendrąją gautųjų intervalų dalį. Remkimės skaičių tiese. Pastebėkime, kad $2-\sqrt{2} \approx 2-1{,}4 < 1$; $\quad 2+\sqrt{2} \approx 2+1{,}4 > 3$.

Sistemos sprendiniai yra $x \in \left(2-\sqrt{2}; 1\right] \cup \left[3; 2+\sqrt{2}\right)$.

Atsakymas. Funkcija tolydi intervaluose $\left(2-\sqrt{2}; 1\right]$ ir $\left[3; 2+\sqrt{2}\right)$.

3. Nubraižykite funkcijos $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$ grafiką. Raskite funkcijos reikšmės $f(x_0)$ pokytį $\Delta f(x_0)$, kai argumento $x_0 = 0$ pokytis $\Delta x = 0{,}3$. Pavaizduokite tai brėžiniu.

Δx — funkcijos nepriklausomojo kintamojo (argumento) reikšmės x_0 pokytis;

$\Delta f(x_0)$ — funkcijos reikšmės $f(x_0)$ pokytis, atitinkantis argumento x_0 pokytį Δx;

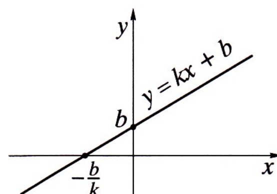
$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Braižome funkcijos $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$ grafiką.

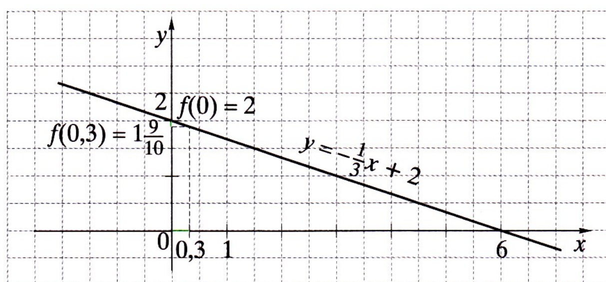
Funkcijos $y = kx + b$ (k ir b — skaičiai) grafikas yra tiesė. Braižant tiesę pakanka rasti jos dviejų taškų koordinates.

Tiesė $y = kx + b$ kerta:

- Ox ašį, kai $y = 0$: $kx + b = 0$, $x = -\frac{b}{k}$;
- Oy ašį, kai $x = 0$: $y = k \cdot 0 + b$, $y = b$.



Funkcijos grafikas yra tiesė $y = -\frac{1}{3}x + 2$.



Raskime funkcijos reikšmės pokytį taške $x_0 = 0$, kai $\Delta x = 0{,}3$. Kitaip sakant, reikia nustatyti, kokiu dydžiu pasikeitė funkcijos reikšmė, kai argumentas nuo $x_0 = 0$ padidėjo 0,3. Tai yra reikia rasti funkcijos reikšmių $f(x_0 + \Delta x)$ ir $f(x_0)$ skirtumą:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(0 + 0{,}3) - f(0) = f(0{,}3) - f(0);$$

$$f(0) = -\frac{1}{3} \cdot 0 + 2 = 2, \quad f(0{,}3) = -\frac{1}{3} \cdot 0{,}3 + 2 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} + 2 = 1\frac{9}{10};$$

$$f(0{,}3) - f(0) = 1\frac{9}{10} - 2 = -\frac{1}{10}.$$

Tai reiškia, kad x reikšmei nuo taško 0 padidėjus 0,3, t. y. iki $0 + 0{,}3 = 0{,}3$, funkcijos reikšmė sumažėjo $\frac{1}{10}$, t. y. nuo 2 iki $1\frac{9}{10}$.

Funkcijos reikšmės pokytis $\Delta f(0) = -\frac{1}{10}$ (kai argumento pokytis $\Delta x = 0{,}3$).

Atsakymas. $\Delta f(0) = -\frac{1}{10}$, kai $\Delta x = 0{,}3$.

4. $f(x) = (x + 1)^4$.

Randame $f(-2)$, — vietoj x rašome -2:

$$f(-2) = (-2 + 1)^4 = (-1)^4 = 1.$$

Randame $f\left(\frac{x}{3} - 1\right)$, — vietoj x rašome $\frac{x}{3} - 1$:

$$f\left(\frac{x}{3} - 1\right) = \left(\frac{x}{3} - 1 + 1\right)^4 = \left(\frac{x}{3}\right)^4 = \frac{x^4}{3^4} = \frac{x^4}{81}.$$

Atsakymas. $f(-2) = 1$, $f\left(\frac{x}{3} - 1\right) = \frac{x^4}{81}$.

5a. $f(x) = \frac{x^2-9x+14}{x-2}$.

Raskime funkcijos apibrėžimo sritį. Funkcija neapibrėžta, kai $x = 2$, nes trupmenos vardiklis su šia x reikšme lygus 0. Vadinasi, $x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.
Prieš braižydami grafiką pastebėkime, kad funkcijos reiškinį galima suprastinti.
Išskaidykime trupmenos skaitiklį dauginamaisiais:

$$x^2 - 9x + 14 = 0, \qquad D = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14 = 81 - 56 = 25,$$

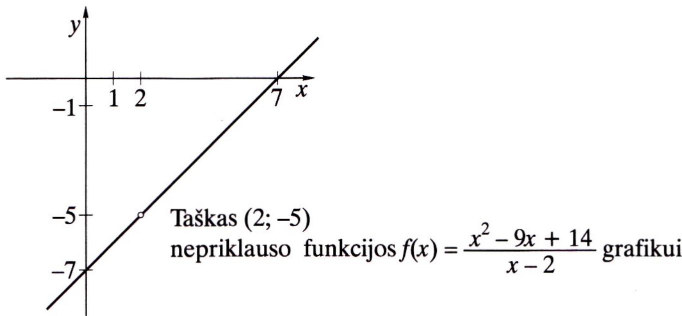
$$x_1 = \frac{9-5}{2} = 2, \quad x_2 = 7;$$

$$x^2 - 9x + 14 = (x-2)(x-7).$$

Suprastinkime trupmeną:

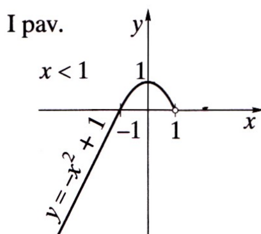
$$\frac{x^2 - 9x + 14}{x-2} = \frac{(x-2)(x-7)}{x-2} = x - 7.$$

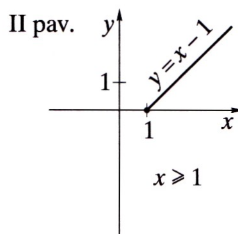
Tai reiškia, kad duotosios funkcijos ir $x - 7$ reikšmės sutampa, kai $x \neq 2$.
Brėžiame tiesę $y = x - 7$, tik nepamirškime, kad taške $x = 2$ ją reikia pertraukti, nes funkcija $f(x)$ su šia x reikšme neapibrėžta.

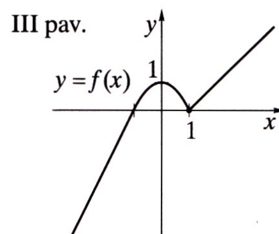


5b. $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{kai } x < 1, \\ x - 1, & \text{kai } x \geqslant 1. \end{cases}$

Iš sąlygos matome, kad kai $x \in (-\infty; 1)$, tai funkcijos grafikas bus parabolės $y = -x^2 + 1$ dalis, priklausanti intervalui $(-\infty; 1)$. Braižome tą funkcijos dalį (žr. I pav.).

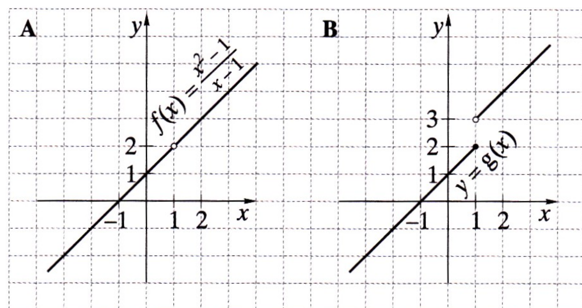






Intervale $x \in [1; +\infty)$ funkcijos $f(x)$ grafikas yra tiesė $y = x - 1$. Brėžiame tą tiesę (žr. II pav.). III pav. pavaizduotas funkcijos $f(x)$ grafikas.

6.



6a. Raskite: $f(2)$, $g(2)$, $f(1)$, $g(1)$.

$f(2)$ randame remdamiesi funkcijos $y = f(x)$ formule. Kadangi

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}, \quad \text{tai} \quad f(2) = \frac{2^2-1}{2-1} = \frac{4-1}{1} = 3.$$

$g(2)$ randame remdamiesi funkcijos $y = g(x)$ grafiku. Matome, kad kai $x = 2$, tai grafikas eina per tašką, kurio koordinatė y yra 4. Vadinasi, $g(2) = 4$.

Iš $y = f(x)$ grafiko matome, kad taške $x = 1$ ši funkcija neapibrėžta, — jos apibrėžimo sritis $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Iš $y = g(x)$ grafiko matome, kad kai $x = 1$, tai $g(1) = 2$.

Atsakymas. $f(2) = 3$, $g(2) = 4$, $f(1)$ — neapibrėžta, $g(1) = 2$.

6b. Raskite: $\lim\limits_{x\to2} f(x)$, $\lim\limits_{x\to2} g(x)$.

Abi funkcijos (ir $y = f(x)$, ir $y = g(x)$) yra tolydžios taške $x = 2$ — jų grafikai, eidami per šį tašką, nenutrūksta. Vadinasi, ieškomos ribos lygios funkcijų reikšmėms šiuose taškuose:

$$\lim_{x\to2} f(x) = \lim_{x\to2} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{2^2-1}{2-1} = \frac{4-1}{1} = \frac{3}{1} = 3,$$

$$\lim_{x\to2} g(x) = 4.$$

Atsakymas. $\lim\limits_{x\to2} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to2} g(x) = 4$.

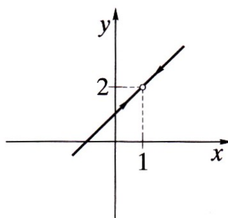
6c. Raskite: $\lim\limits_{x\to1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to1} g(x)$.

Raskime funkcijos $y = f(x)$ ribinę reikšmę, kai $x \to 1$.

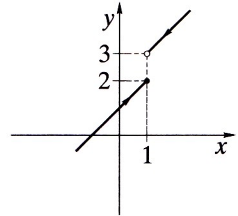
Šiame taške funkcija yra neapibrėžta (nutrūksta), bet ribinė reikšmė egzistuoja.

Eidami grafiku iš kairės į dešinę, vis artėdami prie $x = 1$, matome, kad funkcijos reikšmės artėja prie reikšmės $y = 2$.

Eidami grafiku iš dešinės į kairę, vis artėdami prie $x = 1$, matome, kad funkcijos reikšmės taip pat artėja prie reikšmės $y = 2$. Vadinasi, $\lim\limits_{x\to1} f(x) = 2$.



Raskime funkcijos $y = g(x)$ ribinę reikšmę, kai $x \to 1$.
Šiame taške funkcija yra apibrėžta $g(x) = 2$, bet ji nutrūksta.
Einant grafiku iš kairės, artėjant prie $x = 1$, funkcijos reikšmės artėja prie $y = 2$.
Dabar grafiku eikime iš dešinės artėdami prie $x = 1$. Matome, kad funkcijos reikšmės nebeartėja prie reikšmės $y = 2$ (artėja prie $y = 3$).
Vadinasi, $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$ neegzistuoja.



Atsakymas. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ — neegzistuoja.

7a. $\frac{(x+3)(2x-7)(x-1)}{2x+5} \geqslant 0$.

Tokio tipo racionaliąsias nelygybes patogu spręsti intervalų metodu.
Pastebėkime, kad nelygybė neapibrėžta, kai trupmenos vardiklis lygus 0:

$$2x + 5 = 0, \quad x = -2\frac{1}{2}.$$

Vadinasi, $x = -2\frac{1}{2}$ *negali* būti atsakymo skaičius.
Trupmenos skaitiklis lygus 0, kai:

$$x + 3 = 0, \quad x = -3;$$

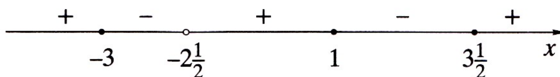
$$2x - 7 = 0, \quad x = 3\frac{1}{2};$$

$$x - 1 = 0, \quad x = 1.$$

Su šiomis x reikšmėmis trupmena lygi 0, vadinasi šios x reikšmės *yra* atsakymo skaičiai.
Surastas x reikšmes (su kuriomis trupmenos skaitiklis ir vardiklis lygus 0) atidėkime skaičių tiesėje ir nustatykime, kokias reikšmes (teigiamas ar neigiamas) įgyja trupmena tų intervalų vidiniuose taškuose.
Intervale $(-\infty; -3)$ trupmena $\frac{(x+3)(2x-7)(x-1)}{2x+5}$ yra didesnė už 0. Tuo įsitikiname paėmę bet kurį intervalo $(-\infty; -3)$ tašką, pvz., $x = -10$:

$$\frac{(-10+3)\,(2\cdot(-10)-7)\,(-10-1)}{2\cdot(-10)+5} = \frac{\ominus\cdot\ominus\cdot\ominus}{\ominus} = \frac{\ominus}{\ominus} = \oplus.$$

Analogiškai nustatome trupmenos ženklus ir kituose intervaluose:



Atsakymas. $x \in (-\infty; -3] \cup \left(-2\frac{1}{2}; 1\right] \cup \left[3\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

7b. $\frac{(x-3)(x+1)^2(x-2)^3}{x^2-9} < 0$.

Vardiklį išskaidykime dauginamaisiais:

$$\frac{(x-3)(x+1)^2(x-2)^3}{(x-3)(x+3)} < 0.$$

Reikšmės $x = 3$ ir $x = -3$, su kuriomis vardiklis lygus nuliui, *negali* priklausyti atsakymui.

Tai atsimename ir numetame skaitiklio ir vardiklio vienodus dauginamuosius $x - 3$:

$$\frac{(x+1)^2(x-2)^3}{x+3} < 0.$$

Dabar verta pastebėti, kad skaitiklio dauginamasis $(x+1)^2$ visada yra neneigiamas. Bet atsakymui reikšmės, kai trupmena lygi 0 (skaitiklis lygus 0) netinka, todėl atsiminę, kad $x = -1$ negali būti nelygybės sprendiniu, padalykime abi nelygybės puses iš $(x+1)^2 > 0$. Gausime:

$$\frac{(x-2)^3}{x+3} < 0.$$

Skaičių tiesėje pažymėkime skaičius, su kuriais trupmenos skaitiklis, vardiklis lygus 0:

$$x - 2 = 0, \quad x = 2;$$
$$x + 3 = 0, \quad x = -3,$$

bei anksčiau surastus $x = 3$, $x = -1$ ir nustatykime trupmenos $\frac{(x-2)^3}{x+3}$ ženklus tuose intervaluose:



Beje, trupmenų $\frac{(x-2)^3}{x+3}$ ir $\frac{x-2}{x+3}$ ženklai yra vienodi.

Atsakymas. $x \in (-3; -1) \cup (-1; 2)$.

7c. $\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x+3} \leqslant \frac{3}{x+4}$.

Pirmiausia suteikiame nelygybei pavidalą $\frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0$.

$$\frac{1}{x+2} + \frac{2}{x+3} - \frac{3}{x+4} \leqslant 0,$$

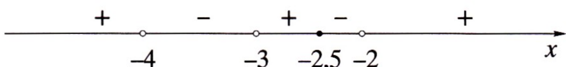
$$\frac{1 \cdot (x+3)(x+4) + 2 \cdot (x+2)(x+4) - 3 \cdot (x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(x+4)} \leqslant 0,$$

$$\frac{x^2 + 4x + 3x + 12 + 2x^2 + 8x + 4x + 16 - 3x^2 - 9x - 6x - 18}{(x+2)(x+3)(x+4)} \leqslant 0,$$

$$\frac{4x + 10}{(x+2)(x+3)(x+4)} \leqslant 0 \,\Big|\, : 4,$$

$$\frac{x + 2{,}5}{(x+2)(x+3)(x+4)} \leqslant 0.$$

Dabar jau nebeskirsime skaitiklio ir vardiklio daugiklių — svarbus tik jų ženklas (ir taškai, kuriuose jie virsta 0). Čia, skirtingai nuo b) punkto, skaitiklį verčiantis nuliu skaičius $x = -2{,}5$ *yra* nelygybės sprendinys, nes su šia x reikšme trupmena lygi 0 (sprendžiame negriežtąją nelygybę).



Atsakymas. $x \in (-4; -3) \cup [-2{,}5; -2)$.

7d. $\sqrt{x^2-16}\cdot(x+3)<0.$

Pradėkime nuo nelygybės apibrėžimo srities.
Duotosios nelygybės sprendiniai gali būti tik tos x reikšmės, su kuriomis pošaknis yra teigiamas (o ne 0):

$$x^2-16>0.$$

Kadangi dabar šaknis visada teigiama, tai duotosios nelygybės sprendiniai yra tos x reikšmės, su kuriomis dauginamasis $x+3$ yra neigiamas.

> Sandauga $a\cdot b$ yra neigiama, kai dauginamieji a ir b yra skirtingų ženklų.
> Nelygybės
>
> $$\sqrt{f(x)}\cdot g(x)<0$$
>
> sprendiniai yra nelygybių sistemos
>
> $$\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)<0 \end{cases}$$
>
> sprendiniai.

Todėl duotoji nelygybė yra ekvivalenti tokiai nelygybių sistemai:

$$\begin{cases} x^2-16>0, \\ x+3<0. \end{cases}$$

Išsprendžiame abi sistemos nelygybes:

$$x^2-16=(x-4)(x+4),$$
$$(x-4)(x+4)>0;$$
$$\begin{cases} x\in(-\infty;-4)\cup(4;+\infty), \\ x\in(-\infty;-3). \end{cases}$$



Bendroji intervalų dalis yra $x\in(-\infty;-4)$.

Atsakymas. $x\in(-\infty;-4)$.

Išvestinės

K2 (1.4–1.8)

1. Duota funkcija $f(x)$:
a) $f(x) = 2x - 1$; b) $f(x) = 7x^2 - 3x$.
1) Remdamiesi funkcijos *išvestinės taške apibrėžimu*, raskite $f(x)$ išvestinę taške $x = 2$; taške $x = 0$.
2) Remdamiesi funkcijos *išvestinės apibrėžimu*, raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę $f'(x)$.

2. Raskite funkcijos išvestinę.
a) $f(x) = 10x^7 + 8x^6 - \frac{2}{3}x^3 + 6x - 12$;
b) $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{x}{9} + \sqrt{\pi}$;
c) $f(x) = \sqrt[5]{x^4} + x^2\sqrt{x} + \frac{6x^3}{\sqrt[3]{x}}$.

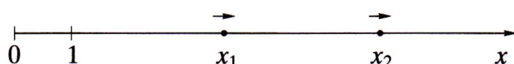
3. Išspręskite lygtį $f'(x) = g'(x)$, kai $f(x) = 2x^3 + 5$ ir $g(x) = 21x^2 - 72x$.

4. a) Duota funkcija $f(x) = x^2 - 4$. Per šios funkcijos grafiko tašką $A(-2; 0)$ nubrėžta liestinė. Parašykite tos liestinės lygtį. Apskaičiuokite plotą trikampio, kurį riboja liestinė ir koordinačių ašys.
b) Parašykite funkcijos $f(x) = x - 2x^2$ grafiko liestinės, einančios per grafiko tašką, kurio abscisė $x_0 = 0$, lygtį. Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką ir tą liestinę.

5. a) Raskite tokius kreivės $y = x^3 - x + 2$ taškus, per kuriuos nubrėžtos šios kreivės liestinės būtų lygiagrečios tiesei $y = 2x - 5$.
b) Įrodykite, kad funkcijos $f(x) = x^2 - 4x$ grafiko liestinės, nubrėžtos grafiko taškuose, kurių abscisės $x_1 = 0$ ir $x_2 = \frac{17}{8}$, yra statmenos.

6. a) Raskite funkcijos $f(x) = x^3$ grafiko liestinės ir Ox ašies sudaromo kampo tangentą, kai liestinė eina per grafiko tašką, kurio abscisė $x_0 = -2$.
b) Raskite kreivės $y = \sqrt[3]{x}$ taškus, per kuriuos nubrėžtos liestinės su abscisių ašimi sudaro $60°$ kampus.

7. Skaičių spinduliu vienu metu pradeda judėti du materialieji taškai. Taškų padėtys nusakomos funkcijomis $x_1(t) = t^2 + 16t$ ir $x_2(t) = 2t^2 + 7t + 8$, kur t reiškia judėjimo laiką (sekundėmis), o $x(t)$ — taško koordinatę laiko momentu t (vienetinė skaičių spindulio padala lygi 1 cm).



Raskite:
1) taškų koordinates pradiniu laiko momentu $t = 0$;
2) laiko momentus, kada tų taškų padėtys sutaps;
3) laiko momentą, kada abiejų taškų greičiai bus lygūs;
4) taškų pagreičius.

1. Duota funkcija $f(x)$:
a) $f(x) = -2x + 1$; b) $f(x) = 2x - 4x^2$.
1) Remdamiesi funkcijos išvestinės taške apibrėžimu, raskite $f(x)$ išvestinę taške $x = 1$; taške $x = 2$.
2) Remdamiesi funkcijos išvestinės apibrėžimu, raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę.

2. Raskite funkcijos išvestinę.
a) $f(x) = 9x^6 + 7x^5 - \frac{1}{2}x^4 + 5x - 10$;
b) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{x}{6} + \sqrt{3}$;
c) $f(x) = \sqrt[4]{x^3} + x\sqrt{x} + \frac{5x^3}{\sqrt[3]{x}}$.

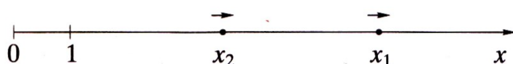
3. Išspręskite lygtį $f'(x) = g'(x)$, kai $f(x) = x^3 + 2$ ir $g(x) = 9x^2 - 15x$.

4. a) Duota funkcija $y = x^2 - 5$. Per šios funkcijos grafiko tašką $A(3; 4)$ nubrėžta liestinė. Parašykite tos liestinės lygtį. Apskaičiuokite plotą trikampio, kurį riboja koordinačių ašys ir liestinė.
b) Parašykite funkcijos $f(x) = 2x^2 - 1$ grafiko liestinės, einančios per grafiko tašką, kurio abscisė $x_0 = -1$, lygtį. Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką ir tą liestinę.

5. a) Raskite tokius kreivės $y = x^3 + x - 2$ taškus, per kuriuos nubrėžtos šios kreivės liestinės būtų lygiagrečios tiesei $y = 4x - 1$.
b) Įrodykite, kad funkcijos $f(x) = x^2 + 2x$ grafiko liestinės, nubrėžtos grafiko taškuose, kurių abscisės $x_1 = -\frac{5}{4}$ ir $x_2 = 0$, yra statmenos.

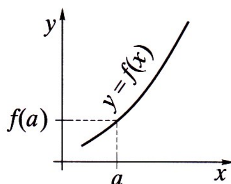
6. a) Raskite funkcijos $f(x) = -\frac{2}{x}$ grafiko liestinės ir Ox ašies sudaromo kampo tangentą, kai liestinė eina per grafiko tašką, kurio abscisė $x_0 = 1$.
b) Raskite kreivės $y = \sqrt[3]{x}$ taškus, per kuriuos nubrėžtos liestinės su abscisių ašimi sudaro 30° kampus.

7. Skaičių spinduliu vienu metu pradeda judėti du materialieji taškai. Taškų padėtys nusakomos funkcijomis $x_1(t) = t^2 + 12t$ ir $x_2(t) = 2t^2 + 5t + 6$, kur t reiškia judėjimo laiką (sekundėmis), o $x(t)$ — taško koordinatę laiko momentu t (vienetinė skaičių spindulio padala lygi 1 cm).

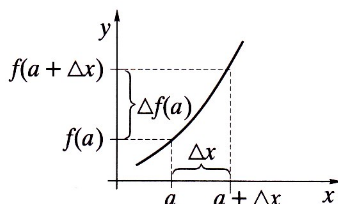


Raskite:
1) taškų koordinates pradiniu laiko momentu $t = 0$;
2) laiko momentus, kada tų taškų padėtys sutaps;
3) laiko momentą, kada abiejų taškų greičiai bus lygūs;
4) taškų pagreičius.

1.1. ***Funkcijos išvestinė taške***



$f(x)$ — funkcija, x — nepriklausomasis kintamasis;
$y = f(x)$ — funkcijos grafikas;
a — nepriklausomojo kintamojo reikšmė (funkcijos apibrėžimo srities taškas $x = a$);
$f(a)$ — funkcijos reikšmė taške a;
$(a; f(a))$ — funkcijos grafiko taškas.



Δx — nepriklausomojo kintamojo reikšmės a pokytis;
$a + \Delta x$ — pokytį Δx atitinkanti nepriklausomojo kintamojo reikšmė;
$\Delta f(a)$ — funkcijos reikšmės $f(a)$ pokytis, atitinkantis pokytį Δx:
$\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$.

APIBRĖŽIMAS. Imkime funkcijos $f(x)$ nepriklausomojo kintamojo x reikšmės a pokytį

$$\Delta x$$

ir tą pokytį atitinkantį funkcijos reikšmės $f(a)$ pokytį

$$\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a).$$

Santykio

$$\frac{\Delta f(a)}{\Delta x}$$

ribą, kai pokytis Δx artėja prie 0, vadiname funkcijos $f(x)$ išvestine taške a.
Rašome: $f'(a) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$.

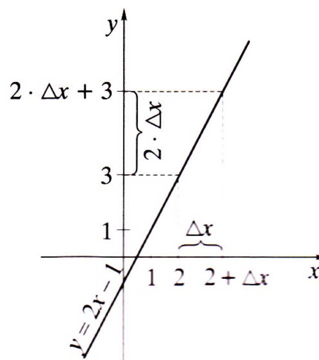
1.1a. Remdamiesi funkcijos išvestinės taške apibrėžimu, raskite funkcijos $f(x) = 2x - 1$ išvestinę taške $x = 2$; taške $x = 0$.

Turime rasti ribą

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = f'(2).$$

Apskaičiuokime funkcijos $f(x) = 2x - 1$ reikšmes taškuose $x = 2$ ir $x = 2 + \Delta x$ ir raskime tų reikšmių pokytį:

$$f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3,$$
$$f(2 + \Delta x) = 2 \cdot (2 + \Delta x) - 1 = 2 \cdot \Delta x + 3,$$
$$f(2 + \Delta x) - f(2) = 2 \cdot \Delta x + 3 - 3 = 2 \cdot \Delta x.$$



Skaičiuojame ribą:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}2=2.$$

Vadinasi, $f'(2)=2$.
Apskaičiuokime $f'(0)$:

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot(0+\Delta x)-1-(2\cdot 0-1)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot\Delta x-1-(-1)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot\Delta x-1+1}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}2=2.$$

Vadinasi, $f'(0)=2$.

Atsakymas. $f'(2)=2,\ f'(0)=2.$

1.1b. Apskaičiuokime $f'(2)$, kai $f(x)=7x^2-3x$.

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{7\cdot(2+\Delta x)^2-3\cdot(2+\Delta x)-(7\cdot 2^2-3\cdot 2)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{7\cdot\big(4+4\cdot\Delta x+(\Delta x)^2\big)-6-3\cdot\Delta x-22}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{28+28\cdot\Delta x+7\cdot(\Delta x)^2-3\cdot\Delta x-28}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{7\cdot(\Delta x)^2+25\cdot\Delta x}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot(7\cdot\Delta x+25)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(7\cdot\Delta x+25)=7\cdot 0+25=25.$$

Vadinasi,

$$f'(2)=25.$$

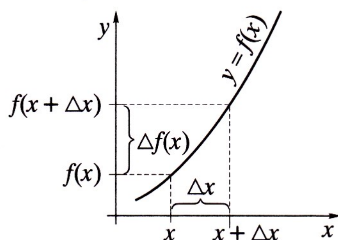
Apskaičiuokime funkcijos $f(x)=7x^2-3x$ išvestinę $f'(0)$:

$$f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{7\cdot(0+\Delta x)^2-3\cdot(0+\Delta x)-(7\cdot 0^2-3\cdot 0)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{7\cdot(\Delta x)^2-3\cdot\Delta x}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(7\cdot\Delta x-3)=$$
$$=7\cdot 0-3=-3.$$

Vadinasi, $f'(0)=-3$.

Atsakymas. $f'(2)=25,\ f'(0)=-3.$

1.2. *Funkcijos išvestinė*



$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

APIBRĖŽIMAS

Funkcijos $f(x)$ nepriklausomojo kintamojo x reikšmėms priskyrę jas atitinkančias išvestinių reikšmes $f'(x)$, gauname naują funkciją, kuri vadinama funkcijos $f(x)$ išvestine.

1.2a. Remdamiesi funkcijos išvestinės apibrėžimu, raskite $f(x) = 2x - 1$ išvestinę.
Turime rasti ribą

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Raskime funkcijos reikšmių $f(x)$ ir $f(x+\Delta x)$ pokytį:

$$f(x+\Delta x) = 2\cdot(x+\Delta x) - 1 = 2x + 2\cdot\Delta x - 1,$$
$$f(x+\Delta x) - f(x) = 2x + 2\cdot\Delta x - 1 - (2x-1) = 2\cdot\Delta x + 2x - 1 - 2x + 1 = 2\cdot\Delta x.$$

Skaičiuojame ribą:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\cdot\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} 2 = 2.$$

Vadinasi, $f'(x) = (2x-1)' = 2$.

Atsakymas. $f'(x) = 2$.

1.2b. Remdamiesi funkcijos išvestinės apibrėžimu, raskite $f(x) = 7x^2 - 3x$ išvestinę.

Skaičiuojame ribą:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{7\cdot(x+\Delta x)^2 - 3\cdot(x+\Delta x) - (7x^2-3x)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{7\cdot\left(x^2 + 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2\right) - 3x - 3\cdot\Delta x - 7x^2 + 3x}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{7x^2 + 14x\cdot\Delta x + 7\cdot(\Delta x)^2 - 3x - 3\cdot\Delta x - 7x^2 + 3x}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{7\cdot(\Delta x)^2 + 14x\cdot\Delta x - 3\cdot\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x(7\cdot\Delta x + 14x - 3)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0}(7\cdot\Delta x + 14x - 3) = 7\cdot 0 + 14x - 3 = 14x - 3.$$

Vadinasi, $f'(x) = (7x^2-3x)' = 14x - 3$.

Atsakymas. $f'(x) = 14x - 3$.

Pastaba. Šis uždavinys (**1**) skirtas funkcijos išvestinės taške ir funkcijos išvestinės supratimui formuoti. Tai grynai teorinis uždavinys. Suprantama, mokant funkcijos išvestinių radimo taisykles, taikyti išvestinės apibrėžimo nereikia. Sunku tikėtis, kad toks uždavinys bus per egzaminus...

2.

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \quad (x)' = 1, \quad (\text{const})' = 0,$$
$$(ax^n + bx^m + cx^t + \cdots)' = n \cdot ax^{n-1} + m \cdot bx^{m-1} + t \cdot cx^{t-1} + \cdots$$

2a. Raskite funkcijos $f(x) = 10x^7 + 8x^6 - \frac{2}{3}x^3 + 6x - 12$ išvestinę.

$$f'(x) = \left(10x^7 + 8x^6 - \frac{2}{3}x^3 + 6x - 12\right)' =$$
$$= 7 \cdot 10x^{7-1} + 6 \cdot 8x^{6-1} - 3 \cdot \frac{2}{3}x^{3-1} + 6 - 0 =$$
$$= 70x^6 + 48x^5 - 2x^2 + 6.$$

Atsakymas. $f'(x) = 70x^6 + 48x^5 - 2x^2 + 6.$

2b. Raskite funkcijos $f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{x}{9} + \sqrt{\pi}$ išvestinę.

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{x}{9} + \sqrt{\pi}\right)' = \left(-x^{-1} + 3 \cdot x^{-2} + \frac{1}{9} \cdot x + \sqrt{\pi}\right)' =$$
$$= -1 \cdot \left(-x^{-1-1}\right) - 2 \cdot 3x^{-2-1} + \frac{1}{9} + 0 =$$
$$= x^{-2} - 6x^{-3} + \frac{1}{9} = \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} + \frac{1}{9}.$$

Atsakymas. $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} + \frac{1}{9}.$

2c. Raskite funkcijos $f(x) = \sqrt[5]{x^4} + x^2\sqrt{x} + \frac{6x^3}{\sqrt[3]{x}}$ išvestinę.

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}, \qquad x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$f'(x) = \left(\sqrt[5]{x^4} + x^2\sqrt{x} + \frac{6x^3}{\sqrt[3]{x}}\right)' =$$
$$= \left(x^{\frac{4}{5}} + x^2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + 6x^3 \cdot x^{-\frac{1}{3}}\right)' = \left(x^{\frac{4}{5}} + x^{\frac{5}{2}} + 6 \cdot x^{\frac{8}{3}}\right)' =$$
$$= \frac{4}{5} \cdot x^{-\frac{1}{5}} + \frac{5}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}} + 16 \cdot x^{\frac{5}{3}} = \frac{4}{5 \cdot \sqrt[5]{x}} + \frac{5}{2} \cdot \sqrt{x^3} + 16 \cdot \sqrt[3]{x^5} =$$
$$= \frac{4}{5 \cdot \sqrt[5]{x}} + \frac{5}{2}x \cdot \sqrt{x} + 16x \cdot \sqrt[3]{x^2}.$$

Atsakymas. $f'(x) = \frac{4}{5\sqrt[5]{x}} + \frac{5}{2}x\sqrt{x} + 16x\sqrt[3]{x^2}.$

3. Išspręskite lygtį $f'(x) = g'(x)$, kai $f(x) = 2x^3 + 5$ ir $g(x) = 21x^2 - 72x$.
Randame $f'(x)$ ir $g'(x)$:

$$f'(x) = 6x^2, \quad g'(x) = 42x - 72.$$

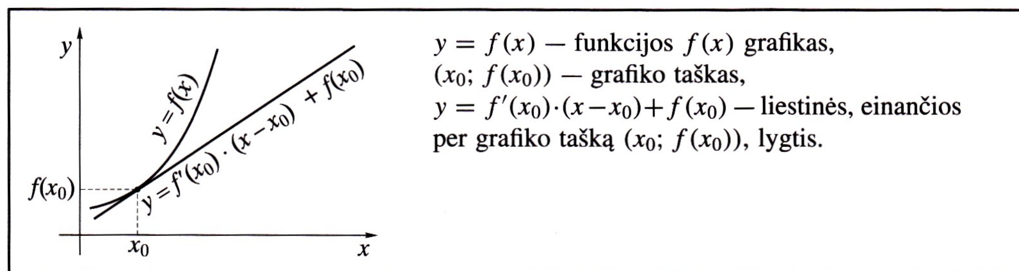
Sprendžiame lygtį $6x^2 = 42x - 72$:

$$6x^2 - 42x + 72 = 0 \mid : 6, \qquad x^2 - 7x + 12 = 0, \qquad D = 49 - 48 = 1,$$

$$x_1 = \frac{7-1}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{7+1}{2} = 4.$$

Atsakymas. 3; 4.

4a. Duota funkcija $f(x) = x^2 - 4$. Per šios funkcijos grafiko tašką $A(-2; 0)$ nubrėžta liestinė. Parašykite tos liestinės lygtį. Apskaičiuokite plotą trikampio, kurį riboja liestinė ir koordinačių ašys.



$y = f(x)$ — funkcijos $f(x)$ grafikas,
$(x_0; f(x_0))$ — grafiko taškas,
$y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$ — liestinės, einančios per grafiko tašką $(x_0; f(x_0))$, lygtis.

Liestinės lygtis:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Kadangi duotosios funkcijos grafiko liestinė eina per tašką $A(-2; 0)$, tai

$$x_0 = -2, \quad f(x_0) = f(-2) = 0.$$

Tada liestinės lygtis:

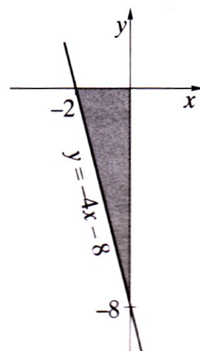
$$y = f'(-2) \cdot \big(x - (-2)\big) + 0 = f'(-2) \cdot (x + 2).$$

Randame $f'(-2)$:

$$f'(x) = \big(x^2 - 4\big)' = 2x, \qquad f'(-2) = 2 \cdot (-2) = -4.$$

Taigi liestinės lygtis yra:

$$y = -4 \cdot (x + 2) = -4x - 8.$$



Pasidarykime brėžinį.
Tiesė $y = -4x - 8$ kerta x ašį, kai $y = 0$:

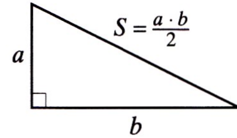
$$-4x - 8 = 0, \quad -4x = 8, \quad x = -2.$$

Tiesė $y = -4x - 8$ kerta y ašį, kai $x = 0$:

$$y = -4 \cdot 0 - 8 = -8.$$

Taigi reikia apskaičiuoti plotą stačiojo trikampio, kurio statinių ilgiai yra 2 ir 8.

Stačiojo trikampio plotas lygus statinių ilgių sandaugos pusei.



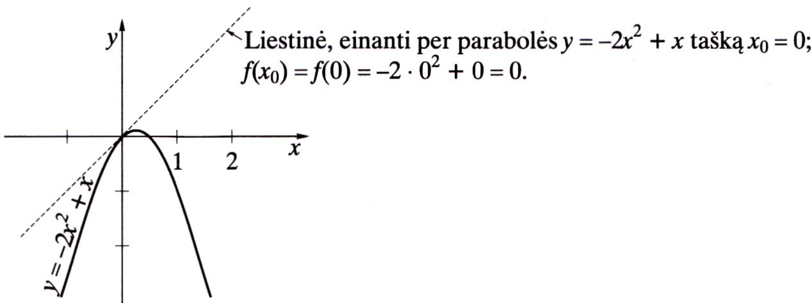
$$S_\Delta = \frac{2 \cdot 8}{2} = 8 \text{ (kvadratiniai vienetai).}$$

Atsakymas. Liestinės lygtis $y = -4x - 8$; trikampio plotas 8.

4b. Parašykite funkcijos $f(x) = x - 2x^2$ grafiko liestinės, einančios per grafiko tašką, kurio abscisė $x_0 = 0$, lygtį. Nubraižykite funkcijos $f(x)$ grafiką ir tą liestinę.

Pirmiausia nusibraižykime funkcijos $f(x) = x - 2x^2$ grafiko eskizą. Grafikas yra parabolė $y = -2x^2 + x$, kurios šakos nukreiptos žemyn $(-2 < 0)$. Parabolė x-sų ašį kerta taškuose, kuriuose $y = 0$. Raskime tuos taškus:

$$-2x^2 + x = 0,$$
$$-x \cdot (2x - 1) = 0,$$
$$x = 0 \quad \text{arba} \quad 2x - 1 = 0, x = \frac{1}{2}.$$



Raskime liestinės (tiesės) lygtį. Tiesės lygtį rasime remdamiesi išvestine:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0) = f'(0) \cdot x + 0 =$$
$$= f'(0) \cdot x.$$

Gavome $y = f'(0) \cdot x$.
Taigi reikia rasti funkcijos išvestinę $f'(x)$ ir apskaičiuoti jos reikšmę, kai $x = 0$, t. y. $f'(0)$.
Pirmiausia randame $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(-2x^2 + x\right)' = -2 \cdot 2x^1 + 1 = -4x + 1.$$

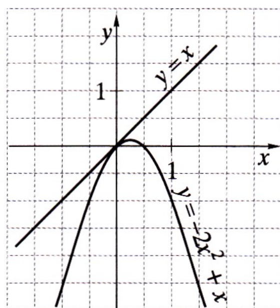
Apskaičiuojame $f'(x)$ reikšmę taške 0:

$$f'(0) = -4 \cdot 0 + 1 = 0 + 1 = 1.$$

Vadinasi, liestinės lygtis yra $y = 1 \cdot x = x$, t. y. tiesė

$$y = x.$$

Dabar galime patikslinti brėžinį:



Atsakymas. Liestinės lygtis $y = x$.

5a. Raskite tokius kreivės $y = x^3 - x + 2$ taškus, per kuriuos nubrėžtos šios kreivės liestinės būtų lygiagrečios tiesei $y = 2x - 5$.

> Tiesės $y_1 = k_1 \cdot x + b_1$ ir $y_2 = k_2 \cdot x + b_2$ yra lygiagrečios, kai jų krypčių koeficientai yra lygūs, t. y. $k_1 = k_2$.
> Funkcijos $y = f(x)$ grafiko liestinės $y = kx + b$, einančios per tašką $(x_0; y_0)$, krypties koeficientas k lygus funkcijos išvestinei tame taške, t. y. $k = f'(x_0)$.

Turime tiesę $y = 2x - 5$, kurios krypties koeficientas $k = 2$.
Funkcijos grafiko $y = x^3 - x + 2$ liestinių krypčių koeficientus nusako funkcijos išvestinė. Raskime $f'(x)$:

$$\left(x^3 - x + 2\right)' = 3x^2 - 1.$$

Raskime tas x reikšmes, su kuriomis funkcijos išvestinės reikšmė lygi duotosios tiesės $y = 2x - 5$ krypties koeficientui ($k = 2$).
Sprendžiame lygtį:

$$3x^2 - 1 = 2, \quad 3x^2 = 3, \quad x^2 = 1, \quad x_1 = -1, \; x_2 = 1.$$

Tai reiškia, kad yra du funkcijos grafiko taškai, per kuriuos nubrėžtos liestinės yra lygiagrečios tiesei $y = 2x - 5$. Randame tų taškų koordinates y:

kai $x = -1$, tai $f(-1) = (-1)^3 - (-1) + 2 = -1 + 1 + 2 = 2$;
kai $x = 1$, tai $f(1) = 1^3 - 1 + 2 = 2$.

Atsakymas. $(-1; 2)$, $(1; 2)$.

5b. Įrodykite, kad funkcijos $f(x) = x^2 - 4x$ grafiko liestinės, nubrėžtos taškuose, kurių $x_1 = 0$ ir $x_2 = \frac{17}{8}$, yra viena kitai statmenos.

> Statmenų tiesių $y_1 = k_1 \cdot x + b_1$ ir $y_2 = k_2 \cdot x + b_2$ krypčių koeficientų sandauga lygi -1, t. y. $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Raskime funkcijos grafiko liestinių, einančių per taškus, kurių abscisės yra 0 ir $\frac{17}{8}$, krypčių koeficientus.

1) Randame funkcijos $f(x)$ išvestinę:

$$f'(x) = \left(x^2 - 4x\right)' = 2x - 4.$$

2) Randame išvestinės reikšmes taškuose $x = 0$ ir $x = \frac{17}{8}$:

$$f'(0) = 2 \cdot 0 - 4 = -4, \qquad f'\left(\frac{17}{8}\right) = 2 \cdot \frac{17}{8} - 4 = \frac{17}{4} - 4 = \frac{1}{4}.$$

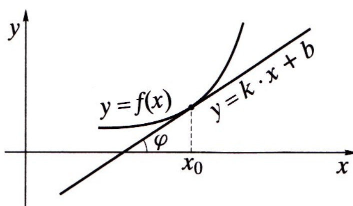
Vadinasi, vienos liestinės krypties koeficientas yra -4, kitos — lygus $\frac{1}{4}$.

3) Apskaičiuojame rastų koeficientų sandaugą:

$$-4 \cdot \frac{1}{4} = -1.$$

Kadangi sandauga lygi -1, tai tos liestinės yra statmenos.

6.



> Tiesės $y = k \cdot x + b$ krypties koeficientas k yra lygus tangentui kampo, kurį ta tiesė sudaro su Ox ašimi: $k = f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi$.

6a. Raskite funkcijos $f(x) = x^3$ grafiko liestinės ir Ox ašies sudaromo kampo tangentą, kai liestinė eina per grafiko tašką, kurio abscisė $x_0 = -2$.

1) Randame funkcijos $f(x)$ išvestinę:

$$f'(x) = \left(x^3\right)' = 3x^2.$$

2) Randame išvestinės reikšmę taške $x = -2$:

$$f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 = 3 \cdot 4 = 12.$$

3) Vadinasi, per tašką, kurio abscisė $x = -2$, einanti liestinė su abscisių ašimi sudaro kampą φ, kurio tangentas lygus 12, t. y. $\operatorname{tg} \varphi = 12$.

Atsakymas. 12.

6b. Raskite kreivės $y = \sqrt[3]{x}$ taškus, per kuriuos nubrėžtos liestinės su abscisių ašimi sudaro 60° kampus.

1) Raskime liestinės ir Ox ašies sudaromo kampo tangentą: $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$.
2) Raskime funkcijos $f(x) = \sqrt[3]{x}$ išvestinę:

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}.$$

3) Raskime kreivės $y = \sqrt[3]{x}$ taško, per kurį nubrėžta liestinė, koordinatę x (šiame taške funkcijos išvestinė lygi duotojo kampo tangentui):

$$\frac{1}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt{3} \mid \cdot \sqrt[3]{x^2},$$

$$\frac{1}{3} = \sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x^2}, \quad \sqrt[3]{x^2} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \mid \uparrow 3,$$

$$x^2 = \frac{1}{\left(3\sqrt{3}\right)^3}, \quad x^2 = \frac{1}{3^3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}},$$

$$x^2 = \frac{1}{27\cdot 3\cdot\sqrt{3}}, \quad x^2 = \frac{1}{81\cdot\sqrt{3}}, \quad x_1 = -\frac{1}{9\cdot\sqrt[4]{3}}, \; x_2 = \frac{1}{9\cdot\sqrt[4]{3}}.$$

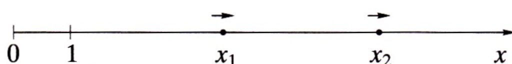
Nustatėme, kad yra du taškai, per kuriuos nubrėžtos funkcijos grafiko liestinės su Ox ašimi sudaro 60° kampą.
4) Apskaičiuojame tų kreivės taškų koordinates y:

$$\text{kai } x = -\frac{1}{9\cdot\sqrt[4]{3}}, \quad \text{tai} \quad y = \sqrt[3]{-\frac{1}{9\cdot\sqrt[4]{3}}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[12]{3}};$$

$$\text{kai } x = \frac{1}{9\cdot\sqrt[4]{3}}, \quad \text{tai} \quad y = \frac{1}{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[12]{3}}.$$

Atsakymas. $\left(-\frac{1}{9\sqrt[4]{3}}; -\frac{1}{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[12]{3}}\right), \left(\frac{1}{9\sqrt[4]{3}}; \frac{1}{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[12]{3}}\right)$.

7. Skaičių spinduliu vienu metu pradeda judėti du materialieji taškai. Taškų padėtys nusakomos funkcijomis $x_1(t) = t^2 + 16t$ ir $x_2(t) = 2t^2 + 7t + 8$, kur t reiškia judėjimo laiką (sekundėmis), o $x(t)$ — taško koordinatę laiko momentu t (vienetinė skaičių spindulio padala lygi 1 cm).



1) Raskime taškų koordinates pradiniu laiko momentu.
Kai $t = 0$, tai:

$$x_1(0) = 0^2 + 16\cdot 0 = 0, \qquad x_2(0) = 2\cdot 0^2 + 7\cdot 0 + 8 = 8.$$

Vadinasi, pradiniu laiko momentu taško x_1 koordinatė buvo 0, o taško x_2 – 8:



Atsakymas. $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 8$.

2) Raskime laiko momentus, kada taškų padėtys sutaps. Kai taškai sutaps, tai jų koordinatės bus lygios. Vadinasi, turime rasti tas t reikšmes, su kuriomis teisinga lygybė:

$$t^2 + 16t = 2t^2 + 7t + 8.$$

Sprendžiame kvadratinę lygtį:

$$t^2 - 9t + 8 = 0, \quad D = 81 - 32 = 49,$$
$$t_1 = \frac{9-7}{2} = 1, \quad t_2 = \frac{9+7}{2} = 8.$$

Vadinasi, taškai sutaps po 1 ir po 8 sekundžių nuo judėjimo pradžios.

Atsakymas. $t = 1$ s ir $t = 8$ s.

3) Raskime laiko momentą, kada abiejų taškų greičiai bus lygūs.

Jeigu funkcija $s(t)$ reiškia materialiojo taško nueitą kelią iki laiko momento t, tai momentinis greitis $v(t)$ laiko momentu t lygus funkcijos $s(t)$ išvestinei: $v(t) = s'(t)$.

Raskime funkcijų $x_1(t)$ ir $x_2(t)$ išvestines:

$$x_1'(t) = \left(t^2 + 16t\right)' = 2t + 16, \quad x_2'(t) = \left(2t^2 + 7t + 8\right)' = 4t + 7.$$

Išvestinės reiškia materialiųjų taškų greičius laiko momentu t:

$$v_1(t) = 2t + 16, \quad v_2(t) = 4t + 7.$$

Sulyginę greičių išraiškas,

$$2t + 16 = 4t + 7,$$

gauname tiesinę lygtį. Ją išsprendę sužinosime, kada abiejų taškų greičiai buvo vienodi. Sprendžiame gautąją lygtį:

$$2t + 16 = 4t + 7, \quad 2t = 9, \quad t = 4{,}5.$$

Vadinasi, taškų greičiai buvo lygūs laiko momentu $t = 4{,}5$ s.

Atsakymas. $t = 4{,}5$ s.

4) Raskime taškų pagreičius.

Jeigu funkcija $v(t)$ reiškia kūno greitį laiko momentu t, tai kūno judėjimo momentinis pagreitis $a(t)$ lygus greičio išvestinei: $a(t) = v'(t)$.

Raskime funkcijų $v_1(t)$ ir $v_2(t)$ išvestines:

$$v_1'(t) = (2t + 16)' = 2, \qquad v_2'(t) = (4t + 7)' = 4.$$

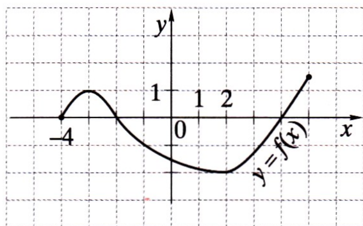
Vadinasi, abu taškai juda *tolygiai greitėdami*: taško x_1 pagreitis $a_1 = 2\,\text{cm/s}^2$, taško x_2 pagreitis $a_2 = 4\,\text{cm/s}^2$.

Atsakymas. $a_1 = 2\,\text{cm/s}^2$, $a_2 = 4\,\text{cm/s}^2$.

Išvestinių taikymas funkcijoms tirti

K3 (2.1–2.4)

1. Pavaizduotas funkcijos $f(x)$ grafikas. Remdamiesi grafiku, nurodykite:



a) intervalus, kuriuose $f'(x) < 0$;
b) intervalus, kuriuose $f(x) > 0$;
c) taškus, kuriuose $f'(x) = 0$;
d) taškus, kuriuose $f(x) = 0$.

2. Raskite funkcijos $f(x)$ reikšmių didėjimo intervalus, reikšmių mažėjimo intervalus ir nubraižykite funkcijos grafiką.

a) $f(x) = 2 - 5x$;
b) $f(x) = x^2 - 4x + 5$;
c) $f(x) = -3x^2 - 9x - 14$.

3. a) Įrodykite, kad funkcija $f(x) = x^3 + 4x$ yra didėjanti visoje realiųjų skaičių aibėje.
b) Su kuriomis a reikšmėmis funkcija $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + ax^2 - x - 7$ yra mažėjanti visoje realiųjų skaičių aibėje?

4. Raskite funkcijos $f(x)$ kritinius taškus ir nustatykite, kurie iš jų yra maksimumo, o kurie — minimumo.

a) $f(x) = x - x^3$;
b) $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{4}{x^2}$;
c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 - 5x^2 + 5$.

5. Raskite funkcijos $f(x)$ ekstremumus.

a) $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x - 2{,}5$;
b) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x$;
c) $f(x) = x^2 - 0{,}25x^4 + 3$.

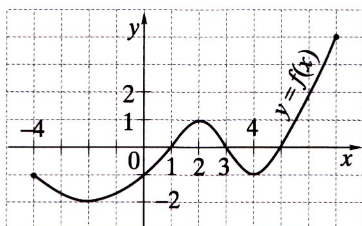
6. Apskaičiuokite:

a) $f'\left(\frac{1}{8}\right)$, kai $f(x) = 2x + 0{,}5\sqrt[3]{x^4}$;
b) $f'\left(8^{-1}\right)$, kai $f(x) = \frac{2x^3}{\sqrt[3]{x}}$;
c) $f'\left(\frac{3}{4}\right)$, kai $f(x) = (2x - 3)(3x + 1)$.

7. Suprastinkite reiškinį.

a) $\sqrt[3]{x} \cdot x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{x^{-1}} + 4x^{\frac{1}{5} - 0{,}2}$;
b) $m + \sqrt{(m-5)^2} - \sqrt{(3-m)^2}$, kai $m > 5$;
c) $\left(p^{0{,}5} + q^{0{,}5}\right)^2 - (16pq)^{0{,}5}$.

1. Pavaizduotas funkcijos $f(x)$ grafikas. Remdamiesi grafiku, nurodykite:



a) intervalus, kuriuose $f'(x) < 0$;
b) intervalus, kuriuose $f(x) > 0$;
c) taškus, kuriuose $f'(x) = 0$;
d) taškus, kuriuose $f(x) = 0$.

2. Raskite funkcijos $f(x)$ reikšmių didėjimo intervalus, reikšmių mažėjimo intervalus ir nubraižykite funkcijos grafiką.

a) $f(x) = 3 - 8x$;

b) $f(x) = x^2 - 5x + 6$;

c) $f(x) = -10 - 8x - x^2$.

3. a) Įrodykite, kad funkcija $f(x) = -x^5 - 8x$ yra mažėjanti visoje realiųjų skaičių aibėje.
b) Su kuriomis a reikšmėmis funkcija $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 2ax^2 - x + 5$ yra mažėjanti visoje realiųjų skaičių aibėje?

4. Raskite funkcijos $f(x)$ kritinius taškus ir nustatykite, kurie iš jų yra maksimumo, o kurie — minimumo.

a) $f(x) = x^3 - 9x$;

b) $f(x) = \frac{x^2}{9} + \frac{4}{x^2}$;

c) $f(x) = 2\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} - 3$.

5. Raskite funkcijos $f(x)$ ekstremumus.

a) $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 4$;

b) $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x^2 - 12x$;

c) $f(x) = 3{,}5x^2 - 0{,}25x^4 + 1$.

6. Apskaičiuokite:

a) $f'\left(\frac{3}{4}\right)$, kai $f(x) = (x - 5)(2x - 5)$;

b) $f'\left(\frac{1}{8}\right)$, kai $f(x) = 3x^2\sqrt[3]{x}$;

c) $f'(1)$, kai $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x^{101}$.

7. Suprastinkite reiškinį.

a) $\sqrt{(2x-1)^2} + \sqrt{(3x-1)^2}$, kai $\frac{1}{3} \leqslant x < \frac{1}{2}$;

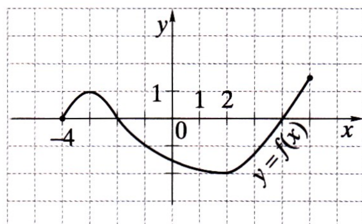
b) $\frac{a^{3n} \cdot b^2}{a^{2n} \cdot b^{n-7}} \cdot \frac{1}{b^9}$;

c) $\sqrt[4]{a^2} + \sqrt{4ab} - \sqrt{25ab} + \sqrt[8]{a^4} + \frac{1}{a}\sqrt{9a^3b}$, kai $a > 0$, $b > 0$.

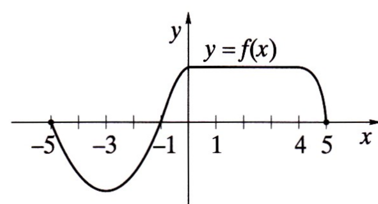
Išvestinių taikymas funkcijoms tirti

K3 (2.1–2.4)

1. Pavaizduotas funkcijos $f(x)$ grafikas. Remdamiesi grafiku, nurodykite:



a) intervalus, kuriuose $f'(x) < 0$;
b) intervalus, kuriuose $f(x) > 0$;
c) taškus, kuriuose $f'(x) = 0$;
d) taškus, kuriuose $f(x) = 0$.

> Funkcijos reikšmių didėjimo intervaluose funkcijos išvestinė yra teigiama (atskiruose taškuose gali būti lygi 0); mažėjimo intervaluose — neigiama (atskiruose taškuose gali būti lygi 0). Ekstremumų taškuose funkcijos išvestinė lygi 0 (retkarčiais — neegzistuoja). Funkcijos savybes geriausiai parodo funkcijos grafikas.
>
> - Jei grafiku einant iš kairės į dešinę kylama aukštyn, tai funkcija yra didėjanti; jei leidžiamasi žemyn — funkcija mažėjanti.
> - Jei grafikas yra virš Ox ašies, tai funkcija yra teigiamoji; jei žemiau Ox ašies — neigiamoji.
> - Funkcijos reikšmės lygios 0 taškuose, kuriuose grafikas kerta Ox ašį.
>
> Pavyzdžiui:
>
> 
>
>
> $f(x) > 0$, kai $x \in (-1; 5)$;
> $f(x) < 0$, kai $x \in (-5; -1)$;
> $f(x) = 0$, kai $x = -5; -1; 5$;
> $f(x)$ reikšmės didėja ($f'(x) > 0$), kai $x \in (-3; 0)$;
> $f(x)$ reikšmės mažėja ($f'(x) < 0$),
> kai $x \in (-5; -3) \cup (4; 5)$;
> $f'(x) = 0$, kai $x = -3$, $x \in [0; 4]$.

1a. Funkcijos išvestinė yra neteigiama tuose intervaluose, kuriuose funkcijos reikšmės $f(x)$ mažėja (kai x reikšmės didėja).
Iš grafiko matome, kad jis leidžiasi (einant iš kairės į dešinę), kai $x \in (-3; 2)$.
Vadinasi, $f'(x) < 0$, kai $x \in (-3; 2)$.

Atsakymas. $x \in (-3; 2)$.

1b. Funkcijos reikšmės yra teigiamos tuose taškuose, kuriuose grafikas yra virš Ox ašies.
Vadinasi, $f(x) > 0$, kai $x \in (-4; -2) \cup (4; 5]$.

Atsakymas. $x \in (-4; -2) \cup (4; 5]$.

1c. Funkcijos išvestinė lygi 0 tuose taškuose, kuriuose grafiko liestinė yra lygiagreti Ox ašiai (ekstremumų taškuose).
Vadinasi, $f'(x) = 0$, kai $x = -3$ ir $x = 2$.

Atsakymas. $x = -3$, $x = 2$.

1d. Funkcijos reikšmės lygios 0 taškuose, kuriuose grafikas kerta Ox ašį.
Vadinasi, $f(x) = 0$, kai $x = -4$, $x = -2$ ir $x = 4$.

Atsakymas. $x = -4$, $x = -2$, $x = 4$.

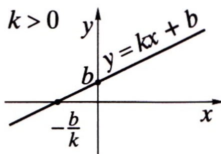
2. Raskite funkcijos $f(x)$ reikšmių didėjimo intervalus, reikšmių mažėjimo intervalus ir nubraižykite funkcijos grafiką.

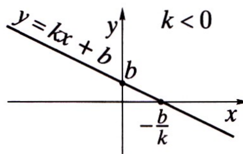
a) $f(x) = 2 - 5x$; b) $f(x) = x^2 - 4x + 5$; c) $f(x) = -3x^2 - 9x - 14$.

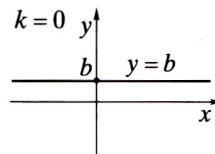
> Funkcijos savybes dažnai patogu nusakyti remiantis funkcijos grafiku.
> Sudėtingesnių funkcijų, ypač tų, kurių grafikus nubraižyti nėra lengva, savybes galima nustatyti algebriškai. Tam padeda funkcijos išvestinė.

2a. $f(x) = 2 - 5x$.

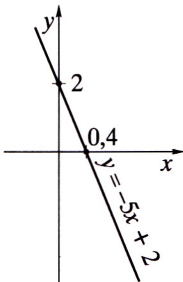
> Funkcijos, kurios pavidalas yra $f(x) = k \cdot x + b$, čia k ir b — skaičiai, grafikas yra tiesė.







Braižome funkcijos grafiką — tiesę $y = -5x + 2$.



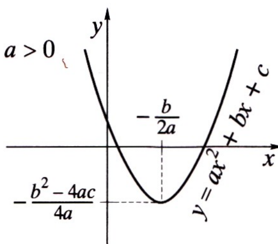
Iš grafiko matome, kad su visais x funkcija yra mažėjanti.
Kad funkcija yra mažėjanti, parodo ir išvestinė:

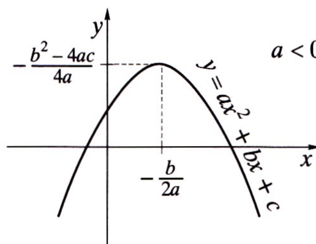
$$f'(x) = (-5x + 2)' = -5 < 0.$$

Atsakymas. Funkcija yra mažėjanti, kai $x \in (-\infty; +\infty)$.

2b. $f(x) = x^2 - 4x + 5$.

> Funkcijos, kurios pavidalas yra $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$, čia a, b, c — skaičiai ($a \neq 0$), grafikas yra parabolė.





I būdas. Braižome parabolę $y = x^2 - 4x + 5$.
1) Kadangi $a = 1 > 0$, tai šakos nukreiptos aukštyn.
2) Parabolės viršūnės koordinatės:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2 \cdot 1} = 2,$$
$$y = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}{4 \cdot 1} = 1 \quad (y = f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = 1).$$

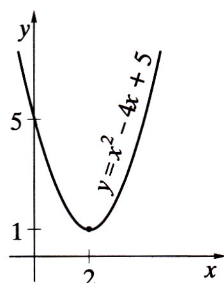
3) Raskime taškus, kuriuose parabolė kerta Ox ašį. Parabolė kirs Ox ašį, kur $y = 0$. Sprendžiame lygtį:

$$x^2 - 4x + 5 = 0, \quad D = 16 - 20 = -4.$$

Lygtis sprendinių neturi ($D < 0$). Vadinasi, parabolė nekerta x-sų ašies.
4) Randame taškus, kuriuose parabolė kerta Oy ašį. Tame taške $x = 0$:

$$y = 0^2 - 4 \cdot 0 + 5 = 5.$$

5) Braižome parabolę:



Remdamiesi brėžiniu nustatome funkcijos reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus.
Funkcijos reikšmės didėja, kai $x \in (2; +\infty)$;
mažėja, kai $x \in (-\infty; 2)$.

II būdas. Funkcijos reikšmių didėjimo ir mažėjimo intervalus randame remdamiesi funkcijos išvestine:

$$f'(x) = \left(x^2 - 4x + 5\right)' = 2x - 4.$$

Kai išvestinė yra teigiama, tai reikšmės didėja.
Sprendžiame nelygybę:

$$2x - 4 > 0, \quad 2x > 4, \quad x > 2.$$

Vadinasi, funkcijos reikšmės didėja, kai $x > 2$, mažėja — kai $x < 2$.

Atsakymas. Reikšmės didėja, kai $x \in (2; +\infty)$; mažėja, kai $x \in (-\infty; 2)$.

2c. $f(x) = -3x^2 - 9x - 14.$

Remkimės išvestine.

$$f'(x) = \left(-3x^2 - 9x - 14\right)' = -6x - 9,$$

$$-6x - 9 > 0, \quad -6x > 9, \quad x < -\frac{3}{2} \text{ — išvestinė teigiama, todėl reikšmės didėja.}$$

Vadinasi, kai $x > -\frac{3}{2}$, tai funkcijos reikšmės mažėja.
Funkcijos grafikas — parabolė $y = -3x^2 - 9x - 14$. Jos šakos nukreiptos žemyn $(-3 < 0)$.
Parabolės viršūnės koordinatės:

$$x = -\frac{-9}{2 \cdot (-3)} = -\frac{3}{2},$$

$$y = -3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 9 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 14 = -3 \cdot \frac{9}{4} + \frac{27}{2} - 14 = \frac{27}{4} - 14 = -\frac{29}{4}.$$

Parabolė kerta Ox ašį, kai $y = 0$:

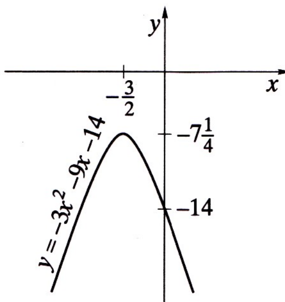
$$-3x^2 - 9x - 14 = 0,$$

$$D = 81 - 12 \cdot 14 < 0 \text{ — vadinasi, parabolė } Ox \text{ ašies nekerta.}$$

Parabolė kerta Oy ašį, kai $x = 0$:

$$y = -3 \cdot 0^2 - 9 \cdot 0 - 14 = -14.$$

Braižome parabolę:



Atsakymas. Reikšmės didėja, kai $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$; mažėja, kai $x \in \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

3a. Įrodykite, kad funkcija $f(x) = x^3 + 4x$ yra didėjanti visoje realiųjų skaičių aibėje.

Randame funkcijos išvestinę:

$$f'(x) = \left(x^3 + 4x\right)' = 3x^2 + 4.$$

Reiškinys $3x^2 + 4 > 0$ su visomis x reikšmėmis.
Vadinasi, su visais $x \in \boldsymbol{R}$ funkcija yra didėjanti.

3b. Su kuriomis a reikšmėmis funkcija $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + ax^2 - x - 7$ yra mažėjanti visoje realiųjų skaičių aibėje?

Randame funkcijos išvestinę: $f'(x) = \left(-\frac{1}{3}x^3 + ax^2 - x - 7\right)' = -x^2 + 2ax - 1$.
Funkcija bus mažėjanti su tomis a reikšmėmis, su kuriomis išvestinė neigiama:

$$-x^2 + 2ax - 1 < 0.$$

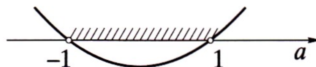
Funkcijos $g(x) = -x^2+2ax-1$ grafikas yra parabolė, kurios šakos nukreiptos žemyn ($-1 < 0$). Vadinasi, visa parabolė bus žemiau Ox ašies (funkcijos $g(x)$ reikšmės bus neigiamos), kai trinario

$$-x^2 + 2ax - 1$$

diskriminantas bus neigiamas (parabolė $y = -x^2 + 2ax - 1$ nekirs Ox ašies).
Randame diskriminantą: $D = (2a)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1) = 4a^2 - 4$.
Randame tas a reikšmes, su kuriomis $D < 0$:

$$4a^2 - 4 < 0, \quad a^2 - 1 < 0, \quad (a - 1)(a + 1) < 0,$$

$$D < 0, \quad \text{kai} \quad a \in (-1; 1).$$



Funkcijos $y = -x^3$ pavyzdys rodo, kad funkcija gali būti mažėjanti, kai $f'(x) \leqslant 0$. Mūsų atveju tai reiškia, kad gali būti ir $D = 0$, t. y. a tinka ir reikšmės -1, $+1$. Kai $a = -1$, tai $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 - x - 7 = -\frac{1}{3}\left(x^3 + 3x^2 + 3x\right) - 7 = -\frac{1}{3}(x + 1)^3 - \frac{20}{3}$. Nesunku įsitikinti, kad ši funkcija yra mažėjanti su visomis x reikšmėmis (beje, jos grafikas — tai transformuotas funkcijos $y = -x^3$ grafikas). Iš tikrųjų, $f'(x) = -(x + 1)^2$, todėl $f(x)$ reikšmės mažėja intervaluose $(-\infty; -1)$ ir $(-1; +\infty)$. Bet taške $x = -1$ funkcija yra tolydi, taigi $f(x)$ yra mažėjanti visur. Kai $a = 1$, tai $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x - 7 = -\frac{1}{3}(x - 1)^3 - \frac{22}{3}$ ir vėl $f(x)$ yra su visais x mažėjanti.

Atsakymas. $a \in [-1; 1]$.

Pastaba. Kad $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x - 7$ ($a = 1$) yra mažėjanti, galima įsitikinti ir nesiremiant išvestine.
Su visais $x_2 > x_1$ funkcijos reikšmių $f(x_2)$, $f(x_1)$ skirtumas $f(x_2) - f(x_1)$ yra neigiamas:

$$f(x_2) - f(x_1) = -\frac{1}{3}\left(x_2^3 - x_1^3\right) + \left(x_2^2 - x_1^2\right) - (x_2 - x_1) =$$
$$= -\frac{1}{3}(x_2 - x_1)\left[x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 - 3x_2 - 3x_1 + 3\right] < 0,$$

nes reiškinys laužtiniuose skliaustuose teigiamas:

$$x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 - 3x_2 - 3x_1 + 3 = x_2^2 + x_2(x_1 - 3) + x_1^2 - 3x_1 + 3 =$$
$$= \frac{1}{4}\left[4x_2^2 + 4x_2(x_1 - 3) + 4x_1^2 - 12x_1 + 12\right] =$$
$$= \frac{1}{4}\left[(2x_2 + x_1 - 3)^2 - (x_1 - 3)^2 + 4x_1^2 - 12x_1 + 12\right] =$$
$$= \frac{1}{4}\left[(2x_2 + x_1 - 3)^2 + 3x_1^2 - 6x_1 + 3\right] = \frac{1}{4}\left[(2x_2 + x_1 - 3)^2 + 3(x_1 - 1)^2\right],$$

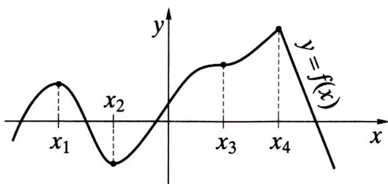
kadangi $2x_2 + x_1 - 3$ ir $x_1 - 1$ kartu negali būti lygūs 0:

$$\text{jeigu } x_1 = 1, \quad \text{tai} \quad 2x_2 + x_1 - 3 = 2x_2 - 2 = 2(x_2 - 1) > 0.$$

4. Raskite funkcijos $f(x)$ kritinius taškus ir nustatykite, kurie iš jų yra maksimumo, o kurie — minimumo.

a) $f(x) = x - x^3$; b) $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{4}{x^2}$; c) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{7}{3}x^3 - 5x^2 + 5$.

Taškai (x reikšmės), kuriuose funkcijos išvestinė lygi 0 arba neegzistuoja, vadinami *kritiniais* taškais.
Taškai, kuriuose funkcijos reikšmės iš didėjimo pereina į mažėjimą (išvestinė „+“ ženklą keičia į „−“ ženklą), vadinami *maksimumo* taškais.
Taškai, kuriuose funkcijos reikšmės iš mažėjimo pereina į didėjimą (išvestinė „−“ ženklą keičia į „+“ ženklą), vadinami *minimumo* taškais.



x_1, x_2, x_3, x_4 — kritiniai taškai,
$f'(x_1) = 0$, $f'(x_2) = 0$,
$f'(x_3) = 0$, $f'(x_4)$ neegzistuoja.
x_1, x_4 — maksimumo taškai,
x_2 — minimumo taškas.

4a. $f(x) = x - x^3$.

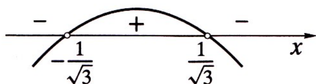
Randame išvestinę:

$$f'(x) = (x - x^3)' = 1 - 3x^2.$$

Randame kritinius taškus — x reikšmes, su kuriomis išvestinė lygi 0 arba neegzistuoja. Kadangi reiškinys $1 - 3x^2$ turi prasmę su visais x, tai išvestinė egzistuoja visoje realiųjų skaičių aibėje.

$$1 - 3x^2 = 0, \quad 3x^2 = 1, \quad x^2 = \frac{1}{3}, \quad x_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Nustatykime išvestinės ženklus intervaluose $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$.



Pereidama tašką $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ išvestinė „−“ ženklą keičia į „+“ ženklą. Vadinasi, funkcija iš mažėjimo pereina į didėjimą, o tai reiškia, kad taškas $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ yra minimumo taškas. Analogiškai taškas $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ yra maksimumo taškas.

Atsakymas. $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ — minimumo taškas, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ — maksimumo taškas.

4b. $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{4}{x^2}$.

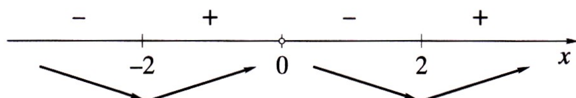
$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{4}{x^2}\right)' = \frac{x}{2} + (4 \cdot x^{-2})' = \frac{x}{2} - 8 \cdot x^{-3} = \frac{x}{2} - \frac{8}{x^3}.$$

Išvestinė neegzistuoja, kai $x = 0$. Bet funkcija $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{4}{x^2}$ neapibrėžta taške $x = 0$, todėl tas taškas negali būti kritinis.

Kritinių taškų ieškome spręsdami lygtį:

$$\frac{x}{2}-\frac{8}{x^3}=0 \mid \cdot 2x^3, \quad x^4-16=0, \quad x^4=16, \quad x_1=-2,\ x_2=2.$$

Kritiniai taškai: $x=-2$, $x=2$.
Randame išvestinės ženklus intervaluose $(-\infty; -2)$, $(-2; 0)$, $(0; 2)$, $(2; +\infty)$ — nepamirštame ir taško 0 (kai $x=0$, tai $f(x)$ neapibrėžta):



Remdamiesi išvestine nustatėme, kad $x=-2$ ir $x=2$ — minimumo taškai.

Atsakymas. $x=-2$ ir $x=2$ — minimumo taškai.

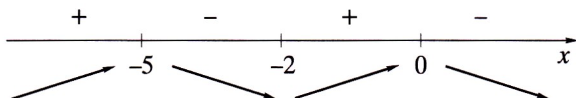
4c. $f(x)=-\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{3}x^3-5x^2+5.$

$$f'(x)=\left(-\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{3}x^3-5x^2+5\right)'=-x^3-7x^2-10x.$$

$f'(x)=0$:

$$-x^3-7x^2-10x=0,$$
$$x(x^2+7x+10)=0,$$
$$x_1=0, \quad \text{arba} \quad x^2+7x+10=0, \quad D=9, \quad x_2=-5, \quad x_3=-2.$$

Kritiniai taškai: $x=-5$, $x=-2$, $x=0$.
Išvestinės ženklai:



Atsakymas. $x=-5$ ir $x=0$ — maksimumo taškai, $x=-2$ — minimumo taškas.

5.

Maksimumo ir minimumo taškai vadinami ekstremumo taškais. Funkcijos reikšmės tuose taškuose vadinamos ekstremumais.

5a. Raskite funkcijos $f(x)=0{,}5x^2-2x-2{,}5$ ekstremumus.

$$f'(x)=x-2,$$
$$x-2=0, \quad x=2 \text{ — ekstremumo taškas (minimumo taškas).}$$

Kad ekstremumo taškas $x=2$ yra minimumo taškas aišku iš to, kad parabolės $y=0{,}5x^2-2x-2{,}5$ šakos nukreiptos aukštyn $(0{,}5>0)$.
Randame funkcijos reikšmę tame taške:

$$f(2)=0{,}5\cdot 2^2-2\cdot 2-2{,}5=-4{,}5.$$

Atsakymas. $\min\limits_{x=2}\left(0{,}5x^2-2x-2{,}5\right)=-4{,}5.$

5b. Raskite funkcijos $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x$ ekstremumus.

$$f'(x) = -x^2 + 6x - 5,$$
$$-x^2 + 6x - 5 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 5 \text{ — ekstremumų taškai.}$$

Randame ekstremumus:

$$f(1) = -\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 = -2\frac{1}{3} \text{ (minimumas)},$$
$$f(5) = -\frac{1}{3} \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^2 - 5 \cdot 5 = 8\frac{1}{3} \text{ (maksimumas)}.$$

Atsakymas. $\min\limits_{x=1} f(x) = -2\frac{1}{3}$; $\max\limits_{x=5} f(x) = 8\frac{1}{3}$.

5c. Raskite funkcijos $f(x) = x^2 - 0{,}25x^4 + 3$ ekstremumus.

$$f'(x) = 2x - x^3,$$
$$2x - x^3 = 0, \quad x(2 - x^2) = 0,$$
$$x_1 = 0; \qquad 2 - x^2 = 0, \quad x^2 = 2, \quad x_2 = -\sqrt{2}, \quad x_3 = \sqrt{2}.$$

Ekstremumai:

$$f(0) = 0^2 - 0{,}25 \cdot 0^4 + 3 = 3,$$
$$f(-\sqrt{2}) = (-\sqrt{2})^2 - 0{,}25 \cdot (-\sqrt{2})^4 + 3 = 2 - 0{,}25 \cdot 4 + 3 = 4,$$
$$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 0{,}25 \cdot (\sqrt{2})^4 + 3 = 2 - 1 + 3 = 4.$$

Atsakymas. $\min\limits_{x=0} f(x) = 3$; $\max\limits_{x=-\sqrt{2}} f(x) = \max\limits_{x=\sqrt{2}} f(x) = 4$.

6a. Apskaičiuokite $f'\left(\frac{1}{8}\right)$, kai $f(x) = 2x + 0{,}5\sqrt[3]{x^4}$.

$$f'(x) = \left(2x + \frac{1}{2}x^{\frac{4}{3}}\right)' = 2 + \frac{2}{3}x^{\frac{1}{3}} = 2 + \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{x},$$
$$f'\left(\frac{1}{8}\right) = 2 + \frac{2}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

6b. Apskaičiuokite $f'(8^{-1})$, kai $f(x) = \frac{2x^3}{\sqrt[3]{x}}$.

$$f'(x) = \left(\frac{2x^3}{x^{\frac{1}{3}}}\right)' = \left(2 \cdot x^{3-\frac{1}{3}}\right)' = \left(2x^{\frac{8}{3}}\right)' = 2 \cdot \frac{8}{3}x^{\frac{5}{3}} = \frac{16}{3} \cdot \sqrt[3]{x^5},$$
$$f'(8^{-1}) = f'\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{16}{3} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^5} = \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{8} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{64}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}.$$

6c. Apskaičiuokite $f'\left(\frac{3}{4}\right)$, kai $f(x) = (2x-3)(3x+1)$.

$$f(x) = (2x-3)(3x+1) = 6x^2 + 2x - 9x - 3 = 6x^2 - 7x - 3,$$
$$f'(x) = 12x - 7,$$
$$f'\left(\frac{3}{4}\right) = 12 \cdot \frac{3}{4} - 7 = 9 - 7 = 2.$$

Atsakymas. a) $2\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{6}$; c) 2.

7a. $\sqrt[3]{x} \cdot x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{x^{-1}} + 4x^{\frac{1}{5}-0,2}$.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

$$\sqrt[3]{x} \cdot x^{\frac{2}{3}} - \frac{2}{x^{-1}} + 4x^{\frac{1}{5}-0,2} = x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}} - 2x^1 + 4x^{\frac{1}{5}-\frac{2}{10}} =$$
$$= x^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} - 2x + 4x^0 =$$
$$= x^1 - 2x + 4 \cdot 1 =$$
$$= x - 2x + 4 =$$
$$= -x + 4.$$

Atsakymas. $-x + 4$.

7b. $m + \sqrt{(m-5)^2} - \sqrt{(3-m)^2}$, kai $m > 5$.

$$\sqrt{a^2} = |a|;$$
$$|a| = \left[\begin{array}{ll} -a, & \text{kai } a < 0 \\ a, & \text{kai } a \geqslant 0. \end{array}\right.$$

$$m + \sqrt{(m-5)^2} - \sqrt{(3-m)^2} = m + |m-5| - |3-m|.$$

Kadangi $m > 5$, tai $m - 5 > 0$, o $3 - m < 0$.
Vadinasi,

$$m + |m-5| - |3-m| = m + (m-5) + (3-m) =$$
$$= m + m - 5 + 3 - m =$$
$$= m - 2.$$

Atsakymas. $m - 2$.

7c. $\left(p^{0,5}+q^{0,5}\right)^2-(16pq)^{0,5}$.

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2, \quad (a\cdot b)^2=a^2\cdot b^2; \quad (a^m)^n=a^{m\cdot n}.$

I būdas.

$$\begin{aligned}\left(p^{0,5}+q^{0,5}\right)^2-(16pq)^{0,5} &= \left(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}}\right)^2-(16pq)^{\frac{1}{2}}=\\ &=\left(p^{\frac{1}{2}}\right)^2+2\cdot p^{\frac{1}{2}}\cdot q^{\frac{1}{2}}+\left(q^{\frac{1}{2}}\right)^2-\sqrt{16pq}=\\ &=p^{\frac{1}{2}\cdot 2}+2\cdot(pq)^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}\cdot 2}-4\sqrt{pq}=\\ &=p^1+2\cdot\sqrt{pq}+q-4\sqrt{pq}=\\ &=p+q-2\sqrt{pq}.\end{aligned}$$

II būdas.

$$\begin{aligned}\left(p^{0,5}+q^{0,5}\right)^2-(16pq)^{0,5} &= \left(p^{0,5}+q^{0,5}\right)^2-16^{0,5}p^{0,5}q^{0,5}=\\ &=p+2p^{0,5}q^{0,5}+q-4p^{0,5}q^{0,5}=\\ &=p-2p^{0,5}q^{0,5}+q=\\ &=\left(p^{0,5}-q^{0,5}\right)^2.\end{aligned}$$

Atsakymas. $p+q-2\sqrt{pq}$.

Funkcijų išvestinių skaičiavimo taisyklės

K4 (3.1–3.2)

1. Apskaičiuokite:

a) $f'(0)$, kai $f(x) = \frac{x^2+2}{2x+3}$;

b) $f'(2)$, kai $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x}$;

c) $f'\left(\frac{a}{2}\right)$, kai $f(x) = \left(\frac{1}{x} + 1\right)^3$.

2. Raskite $f(g(x))$ ir $g(f(x))$, kai:

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7$;

b) $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $g(x) = x^3 + 3x$;

c) $f(x) = x^7$, $g(x) = x^2 + x\sqrt[5]{x}$.

3. Raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę dviem būdais:

1) pertvarkę reiškinį į daugianarį ir tada diferencijuodami;

2) taikydami funkcijų sandaugos arba dalmens skaičiavimo taisyklę.

a) $f(x) = (x-1)(x+1)$;

b) $f(x) = (\sqrt{x} + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$;

c) $f(x) = \frac{x+1}{2\sqrt{x}}$.

4. 5 m ilgio kopėčios pastatytos vertikaliai. Apatinis kopėčių galas pradeda slysti pastoviu 2 m/s greičiu.

1) Po kiek laiko nuo slydimo pradžios kopėčios nukris ant žemės?

2) Užrašykite formulę, kuria remiantis būtų galima apskaičiuoti viršutinio kopėčių galo greitį $v(t)$ laiko momentu t nuo slydimo pradžios (t matuojama sekundėmis).

3) Apskaičiuokite viršutinio kopėčių galo nueitą kelią per $t = 2$ sekundes ir greitį laiko momentu $t = 2$ (sekundės).

5. a) Raskite funkcijos $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ taškus, per kuriuos nubrėžtos šios funkcijos grafiko liestinės būtų lygiagrečios tiesei $y = 2x - 3$.

b) Raskite funkcijos $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ grafiko tašką, per kurį nubrėžta liestinė būtų statmena tiesei $y = 2x + 5$.

c) Raskite funkcijos $h(x) = x(x-4)^3$ taškus, per kuriuos nubrėžtos šios funkcijos grafiko liestinės būtų lygiagrečios abscisių ašiai.

6. Išspręskite lygtį.

a) $0{,}125 \cdot 4^{2x-1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$;

b) $5^{2x-3} = 2 \cdot 5^{2x-2} - 9$;

c) $7^x - 7^{2-x} = 48$.

1. Apskaičiuokite:
   a) $f'(4)$, kai $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$;
   b) $f'(1)$, kai $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 2}$;
   c) $f'(-3)$, kai $f(x) = \left(\frac{3}{x} - x\right)^4$.

2. Raskite $f(g(x))$ ir $g(f(x))$, kai:
   a) $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = 3x^3 + 2x^2 - 12$;
   b) $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad g(x) = 3x^2 - 6x$;
   c) $f(x) = x^9, \quad g(x) = x^3 - x\sqrt[6]{x}$.

3. Raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę dviem būdais:
   1) pertvarkę reiškinį ir tada diferencijuodami;
   2) taikydami funkcijų sandaugos arba dalmens skaičiavimo taisyklę.
   a) $f(x) = (x - 2)(x + 2)$;
   b) $f(x) = (\sqrt{x} - 2)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 2\right)$;
   c) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}}$.

4. Lempa kabo 12 m aukštyje virš tiesaus horizontalaus tako, kuriuo eina 1,8 m ūgio žmogus. Kokiu greičiu ilgėja žmogaus šešėlis, jei jis tolsta 50 m/min greičiu?

5. a) Raskite funkcijos $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$ taškus, per kuriuos nubrėžtos šios funkcijos grafiko liestinės būtų lygiagrečios tiesei $y = \frac{1}{4}x - 3$.
   b) Raskite funkcijos $f(x) = \sqrt{5 - 2x}$ tašką, per kurį nubrėžta šios funkcijos grafiko liestinė būtų statmena tiesei $y = 2x + 6$.
   c) Raskite funkcijos $g(x) = x^2(x - 2)^2$ taškus, per kuriuos nubrėžtos šios funkcijos grafiko liestinės būtų lygiagrečios abscisių ašiai.

6. Išspręskite lygtį.
   a) $0{,}0625 \cdot 8^{3x-1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{16}\right)^{-x}$;
   b) $3^{2x-2} - 12 = -3^{2x-1}$;
   c) $2^{3-x} = 9 - 2^x$.

Funkcijų išvestinių skaičiavimo taisyklės

K4 (3.1–3.2)

1a. Apskaičiuokite $f'(0)$, kai $f(x) = \frac{x^2+2}{2x+3}$.

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Randame $f'(x)$:

$$\left(\frac{x^2+2}{2x+3}\right)' = \frac{(x^2+2)'\cdot(2x+3) - (x^2+2)\cdot(2x+3)'}{(2x+3)^2} =$$
$$= \frac{2x\cdot(2x+3) - (x^2+2)\cdot 2}{(2x+3)^2} =$$
$$= \frac{4x^2+6x-2x^2-4}{(2x+3)^2} = \frac{2x^2+6x-4}{(2x+3)^2};$$
$$f'(x) = \frac{2x^2+6x-4}{(2x+3)^2}.$$

Apskaičiuojame $f'(0)$:

$$f'(0) = \frac{2\cdot 0^2 + 6\cdot 0 - 4}{(2\cdot 0+3)^2} = \frac{-4}{9} = -\frac{4}{9}.$$

Atsakymas. $-\frac{4}{9}$.

1b. Apskaičiuokite $f'(2)$, kai $f(x) = \sqrt{x^3-2x}$.

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \qquad \left(f^n(x)\right)' = n\cdot f^{n-1}(x)\cdot f'(x)$$

Randame $f'(x)$:

$$\left(\sqrt{x^3-2x}\right)' = \left[\left(x^3-2x\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}\left(x^3-2x\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\left(x^3-2x\right)' =$$
$$= \frac{1}{2}\left(x^3-2x\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(3x^2-2\right) = \frac{1}{2\cdot(x^3-2x)^{\frac{1}{2}}}\cdot\left(3x^2-2\right) =$$
$$= \frac{3x^2-2}{2\cdot\sqrt{x^3-2x}};$$

$$f'(x) = \frac{3x^2-2}{2\sqrt{x^3-2x}}.$$

Apskaičiuojame $f'(2)$:

$$f'(2) = \frac{3\cdot 2^2-2}{2\cdot\sqrt{2^3-2\cdot 2}} = \frac{3\cdot 4-2}{2\cdot\sqrt{8-4}} = \frac{10}{2\cdot 2} = \frac{5}{2}.$$

Atsakymas. $\frac{5}{2}$.

1c. Apskaičiuokite $f'\left(\frac{a}{2}\right)$, kai $f(x) = \left(\frac{1}{x} + 1\right)^3$.

Randame $f'(x)$:

$$\left[\left(\frac{1}{x}+1\right)^3\right]' = 3\left(\frac{1}{x}+1\right)^{3-1} \cdot \left(\frac{1}{x}+1\right)' = 3\left(\frac{1}{x}+1\right)^2 \cdot \left(x^{-1}\right)' =$$
$$= 3\left(\frac{1}{x}+1\right)^2 \cdot (-1) \cdot x^{-1-1} = -3\left(\frac{1}{x}+1\right)^2 \cdot \frac{1}{x^2} = -3\left(\frac{1+x}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{x^2};$$

$$f'(x) = -\frac{3(1+x)^2}{x^4}.$$

Randame $f'\left(\frac{a}{2}\right)$:

$$f'\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{3\left(1+\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^4}.$$

Atsakymas. $-\frac{3\left(1+\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^4}$.

2a. Raskite $f(g(x))$ ir $g(f(x))$, kai $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7$.

$$f(g(x)) = f(2x^3 - 3x^2 + 7) = \sqrt{2x^3 - 3x^2 + 7};$$
$$g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 2 \cdot (\sqrt{x})^3 - 3 \cdot (\sqrt{x})^2 + 7 =$$
$$= 2 \cdot \sqrt{x^3} - 3x + 7 = 2x\sqrt{x} - 3x + 7.$$

Atsakymas. $f(g(x)) = \sqrt{2x^3 - 3x^2 + 7}$, $g(f(x)) = 2x\sqrt{x} - 3x + 7$.

2b. Raskite $f(g(x))$ ir $g(f(x))$, kai $f(x) = \sqrt[4]{x}$, $g(x) = x^3 + 3x$.

$$f(g(x)) = f(x^3 + 3x) = \sqrt[4]{x^3 + 3x};$$
$$g(f(x)) = g\left(\sqrt[4]{x}\right) = \left(\sqrt[4]{x}\right)^3 + 3 \cdot \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{x^3} + 3\sqrt[4]{x}.$$

Atsakymas. $f(g(x)) = \sqrt[4]{x^3 + 3x}$, $g(f(x)) = \sqrt[4]{x^3} + 3\sqrt[4]{x}$.

2c. Raskite $f(g(x))$ ir $g(f(x))$, kai $f(x) = x^7$, $g(x) = x^2 + x\sqrt[5]{x}$.

$$f(g(x)) = f\left(x^2 + x\sqrt[5]{x}\right) = \left(x^2 + x\sqrt[5]{x}\right)^7;$$
$$g(f(x)) = g\left(x^7\right) = \left(x^7\right)^2 + x^7 \cdot \left(\sqrt[5]{x^7}\right) = x^{14} + x^7 \cdot x \cdot \sqrt[5]{x^2} = g\left(x^7\right) = x^{14} + x^8\sqrt[5]{x^2}.$$

Atsakymas. $f(g(x)) = \left(x^2 + x\sqrt[5]{x}\right)^7$, $g(f(x)) = x^{14} + x^8\sqrt[5]{x^2}$.

3. Raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę dviem būdais:

1) pertvarkę reiškinį į daugianarį ir tada diferencijuodami;

2) taikydami funkcijų sandaugos arba dalmens skaičiavimo taisyklę.

a) $f(x) = (x-1)(x+1)$; b) $f(x) = (\sqrt{x}+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$; c) $f(x) = \frac{x+1}{2\sqrt{x}}$.

3a. 1) $f(x) = (x-1)\cdot(x+1) = x^2 - 1^2 = x^2 - 1;\quad f'(x) = (x^2-1)' = 2x.$

2)

$$\boxed{\left[f(x)\cdot g(x)\right]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = \left[(x-1)\cdot(x+1)\right]' &= (x-1)'\cdot(x+1) + (x-1)\cdot(x+1)' = \\ &= 1\cdot(x+1) + (x-1)\cdot 1 = \\ &= x+1+(x-1) = x+1+x-1 = 2x. \end{aligned}$$

Atsakymas. $2x$.

3b. 1) $f(x) = (\sqrt{x}+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = 1 - \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 =$

$= \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x};$

$f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right)' =$

$= -\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}-1} - \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2\cdot\sqrt{x^3}} - \frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}.$

Gautąjį reiškinį galima parašyti kaip vieną trupmeną:

$$-\frac{1}{2\sqrt{x^3}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{-1-x}{2x\sqrt{x}} = -\frac{1+x}{2x\sqrt{x}}.$$

2) $f'(x) = \left[(\sqrt{x}+1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)\right]' =$

$= (\sqrt{x}+1)'\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) + (\sqrt{x}+1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)' =$

$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) + (\sqrt{x}+1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot x^{-\frac{3}{2}} =$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) - (\sqrt{x}+1)\cdot\frac{1}{2x\sqrt{x}} =$

$= \frac{1}{2x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}} =$

$= \frac{\sqrt{x} - x - \sqrt{x} - 1}{2x\sqrt{x}} = \frac{-x-1}{2x\sqrt{x}} = -\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}.$

Atsakymas. $-\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$.

3c. 1) $f(x) = \frac{x+1}{2\sqrt{x}} = (x+1)\cdot\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{1-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$

$f'(x) = \left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\right) =$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}\right) = \frac{x-1}{4x\sqrt{x}}.$

2)

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\right)' = \frac{(x+1)'\cdot 2\sqrt{x} - (x+1)\cdot\left(2\sqrt{x}\right)'}{\left(2\sqrt{x}\right)^2} =$$

$$= \frac{1\cdot 2\sqrt{x} - (x+1)\cdot 2\cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{4x} = \frac{2\sqrt{x} - (x+1)\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}}{4x} =$$

$$= \frac{2\sqrt{x} - \frac{x+1}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{\frac{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{x}-(x+1)}{\sqrt{x}}}{4x} = \frac{2x - x - 1}{4x\sqrt{x}} = \frac{x-1}{4x\sqrt{x}}.$$

Atsakymas. $\frac{x-1}{4x\sqrt{x}}$.

4. 5 m ilgio kopėčios pastatytos vertikaliai. Apatinis kopėčių galas pradeda slysti pastoviu 2 m/s greičiu.

1) Po kiek laiko nuo slydimo pradžios kopėčios nukris ant žemės?
2) Užrašykite formulę, kuria remiantis būtų galima apskaičiuoti viršutinio kopėčių galo greitį $v(t)$ laiko momentu t nuo slydimo pradžios (t matuojama sekundėmis).
3) Apskaičiuokite viršutinio kopėčių galo nueitą kelią per $t = 2$ sekundes ir greitį laiko momentu $t = 2$ (sekundės).

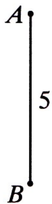
Kai kūnas juda pastoviu greičiu v, tai per laiką t jo nueitas kelias s lygus greičio ir laiko sandaugai:

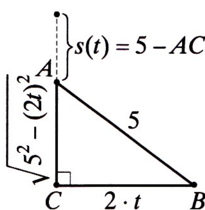
$$s(t) = v\cdot t.$$

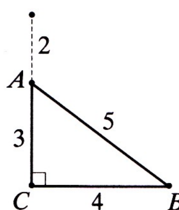
Kūno greitis v laiko momentu t (nuo judėjimo pradžios) lygus per tą laiką nueito kelio s išvestinei:

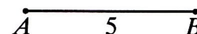
$$v(t) = s'(t).$$

Pavaizduokime situaciją brėžiniu.





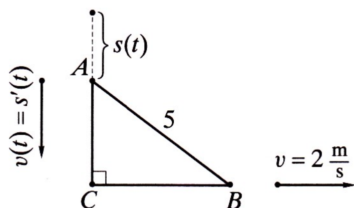




1) Kai kopėčios bus ant žemės, tai apatinis kopėčių galas B bus nuslydęs 5 metrų atstumą. Kadangi taškas B slydo 2 metrų per sekundę greičiu, tai B slydimo laiką t rasime atstumą padaliję iš greičio:

$$t = \frac{s}{v} = \frac{5}{2} = 2{,}5 \text{ (sekundės).}$$

2) Kad rastume viršutinio kopėčių galo (taško A) greitį laiko momentu t, turime rasti per laiką t taško A nueito kelio $s(t)$ išvestinę.
Vadinasi, turime rasti, kaip taško A nueitas kelias priklauso nuo t.



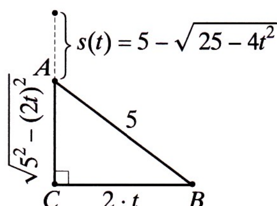
Kadangi apatinis kopėčių galas B juda pastoviu 2 metrų per sekundę greičiu, tai per laiką t jis pasislinks atstumą CB, lygų

$$CB = 2 \cdot t.$$

Iš stačiojo $\triangle ACB$ ($\angle C = 90^\circ$, $AB = 5\,\text{m}$, $CB = 2 \cdot t\,(\text{m})$) raskime AC — viršutinio kopėčių galo atstumą iki žemės laiko momentu t.
Remdamiesi Pitagoro teorema gauname:

$$AC^2 = AB^2 - CB^2, \quad AC = \sqrt{AB^2 - CB^2},$$
$$AC = \sqrt{5^2 - (2t)^2}, \quad AC = \sqrt{25 - 4t^2}\,(\text{m}).$$

Taško A per laiką t nueitas kelias: $s(t) = 5 - \sqrt{25 - 4t^2}\,(\text{m})$.



Raskime taško A greitį v laiko momentu t:

$$v(t) = s'(t) =$$
$$= \left(5 - \sqrt{25 - 4t^2}\right)' = -\left[\left(25 - 4t^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]' =$$
$$= -\frac{1}{2} \cdot \left(25 - 4t^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(25 - 4t^2\right)' =$$
$$= -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{25 - 4t^2}} \cdot (-8t) =$$
$$= \frac{4t}{\sqrt{25 - 4t^2}}.$$

3) Kadangi viršutinis kopėčių galas per t sekundžių pasislenka

$$s(t) = 5 - \sqrt{25 - 4t^2}$$

metrų, tai po 2 sekundžių nuo judėjimo pradžios ($t = 2$) tas galas pasislinks:

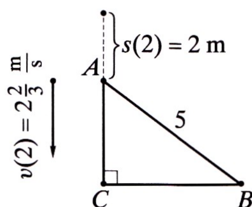
$$s(2) = 5 - \sqrt{25 - 4 \cdot 2^2} = 5 - \sqrt{25 - 16} = 5 - 3 = 2\,(\mathrm{m}).$$

Kadangi taško A greitis:

$$v(t) = \frac{4t}{\sqrt{25 - 4t^2}}\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right),$$

tai laiko momentu $t = 2$ s

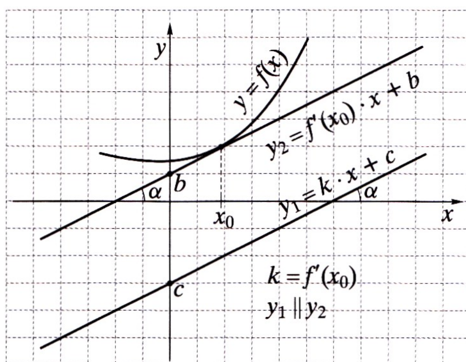
$$v(2) = \frac{4 \cdot 2}{\sqrt{25 - 4 \cdot 2^2}} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right).$$



Atsakymas. 1) Po 2,5 s; 2) $v(t) = \frac{4t}{25-4t^2}$; 3) $s(2) = 2$ m, $v(2) = 2\frac{2}{3}$ m/s.

5a. Raskite funkcijos $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ taškus, per kuriuos nubrėžtos šios funkcijos grafiko liestinės būtų lygiagrečios tiesei $y = 2x - 3$.

Tiesės lygtis $y = k \cdot x + b$; čia k ir b — skaičiai.



Funkcijos $y = f(x)$ grafiko liestinės, einančios per grafiko tašką, kurio abscisė lygi x_0, krypties koeficientas lygus funkcijos išvestinės reikšmei taške x_0.
Lygiagrečių tiesių krypčių koeficientai yra lygūs.

Tiesės $y = 2x - 3$ krypties koeficientas $k = 2$.
Reikia rasti funkcijos $f(x)$ išvestinę ir tas x reikšmes, su kuriomis $f'(x) = 2$.

$$f'(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = \frac{(x-1)' \cdot (x+1) - (x-1) \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} =$$
$$= \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

Randame x reikšmes, su kuriomis teisinga lygybė:

$$\frac{2}{(x+1)^2} = 2 \;\Big|\cdot \frac{(x+1)^2}{2} \neq 0,$$
$$1 = (x+1)^2, \quad x^2 + 2x + 1 - 1 = 0, \quad x^2 + 2x = 0,$$
$$x(x+2) = 0, \quad x_1 = 0; \quad x + 2 = 0, \quad x_2 = -2.$$

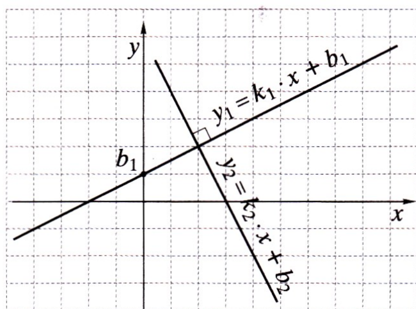
Vadinasi, yra du funkcijos grafiko taškai, per kuriuos nubrėžtos liestinės yra lygiagrečios tiesei $y = 2x - 3$. Apskaičiuokime tų taškų koordinates y:

$$f(0) = \frac{0-1}{0+1} = -1,$$
$$f(-2) = \frac{-2-1}{-2+1} = 3.$$

Atsakymas. (0; −1), (−2; 3).

5b. Raskite funkcijos $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ grafiko tašką, per kurį nubrėžta liestinė būtų statmena tiesei $y = 2x + 5$.

Tiesės $y_1 = k_1 \cdot x + b_1$, $y_2 = k_2 \cdot x + b_2$ yra statmenos, kai jų krypčių koeficientų sandauga lygi -1.



$y_1 \perp y_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$

Reikia rasti tą x reikšmę, su kuria $g'(x) \cdot 2 = -1$.
Randame $g(x)$ išvestinę:

$$g'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{x+2}}\right)' = \left[(x+2)^{-\frac{1}{2}}\right]' = -\frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{3}{2}} \cdot (x+2)' =$$
$$= -\frac{1}{2\sqrt{(x+2)^3}}.$$

Sprendžiame lygtį:

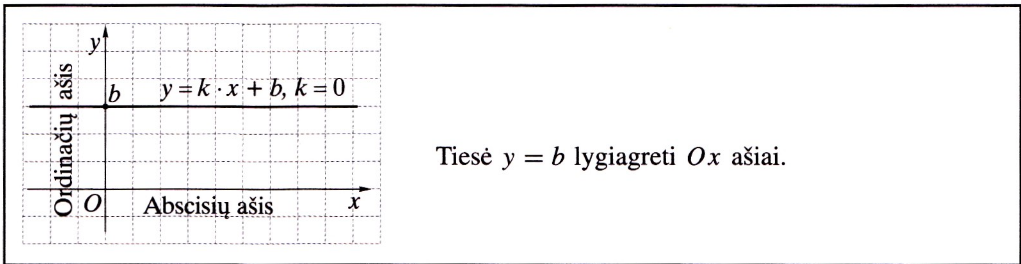
$$-\frac{1}{2\sqrt{(x+2)^3}}\cdot 2=-1,\quad \frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}}=1,\quad \sqrt{(x+2)^3}=1,$$
$$(x+2)^3=1,\quad x+2=1,\quad x=-1.$$

Apskaičiuojame atitinkamą koordinatę y:

$$g(-1)=\frac{1}{\sqrt{-1+2}}=1.$$

Atsakymas. $(-1;\,1)$.

5c. Raskite funkcijos $h(x)=x(x-4)^3$ taškus, per kuriuos nubrėžtos šios funkcijos grafiko liestinės būtų lygiagrečios abscisių ašiai.



Reikia rasti tas x reikšmes, su kuriomis $h'(x)=0$.

$$h'(x)=\left[x\cdot(x-4)^3\right]'=x'\cdot(x-4)^3+x\cdot\left[(x-4)^3\right]'=$$
$$=(x-4)^3+x\cdot 3(x-4)^2\cdot(x-4)'=$$
$$=(x-4)^3+3x(x-4)^2.$$

Sprendžiame lygtį:

$$(x-4)^3+3x(x-4)^2=0,$$
$$(x-4)^2\cdot\big((x-4)+3x\big)=0,$$
$$(x-4)^2\cdot(4x-4)=0,$$
$$(x-4)=0,\quad \text{arba}\quad 4x-4=0,$$
$$x_1=4,\qquad x_2=1.$$

Randame funkcijos reikšmes taškuose $x=4$ ir $x=1$:

$$h(4)=4\cdot(4-4)^3=4\cdot 0=0,$$
$$h(1)=1\cdot(1-4)^3=-27.$$

Atsakymas. $(4;\,0)$, $(1;\,-27)$.

6.

Lygtys, kurių nežinomasis yra laipsnio rodiklyje, vadinamos rodiklinėmis lygtimis. Rodiklinės lygtys sprendžiamos suteikiant (jei įmanoma) pavidalą

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}.$$

Tokio pavidalo lygties (kai $a > 0$, $a \neq 1$) sprendiniai yra tos x reikšmės, su kuriomis

$$f(x) = g(x).$$

6a. Išspręskite lygtį $0{,}125 \cdot 4^{2x-1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$.

Eikime prie laipsnių su pagrindu 2:

$$\frac{1}{8} \cdot (2^2)^{2x-1} = \left(\frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^3}\right)^{-x}, \quad 2^{-3} \cdot 2^{2\cdot(2x-1)} = \left(2^{\frac{1}{2}-3}\right)^{-x}.$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^m : a^n = a^{m-n}, \quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}, \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

$$2^{-3+4x-2} = 2^{-\frac{5}{2}\cdot(-x)}, \quad 2^{4x-5} = 2^{\frac{5}{2}x}.$$

Gavome rodiklinę lygtį, kurios pagrindai yra vienodi. Sulyginame laipsnių rodiklius:

$$4x - 5 = \frac{5}{2}x, \quad 8x - 10 = 5x, \quad 3x = 10, \quad x = 3\frac{1}{3}.$$

Atsakymas. $3\frac{1}{3}$.

6b. Išspręskite lygtį $5^{2x-3} = 2 \cdot 5^{2x-2} - 9$.

Čia nepavyksta lygčiai suteikti pavidalą $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, bet nesunku gauti vienodus laipsnius:

$$\frac{5^{2x}}{5^3} = \frac{2 \cdot 5^{2x}}{5^2} - 9 \;\Big|\; \cdot 5^3,$$
$$5^{2x} = 2 \cdot 5^{2x} \cdot 5 - 9 \cdot 5^3,$$
$$5^{2x} = 10 \cdot 5^{2x} - 9 \cdot 5^3,$$
$$9 \cdot 5^{2x} = 9 \cdot 5^3,$$
$$5^{2x} = 5^3,$$
$$2x = 3,$$
$$x = \frac{3}{2}.$$

Atsakymas. $\frac{3}{2}$.

6c. Išspręskite lygtį $7^x - 7^{2-x} = 48$.

Pertvarkykime duotąją lygtį:

$$7^x - \frac{7^2}{7^x} = 48.$$

Pažymėkime $7^x = y$ $(y > 0)$. Tada:

$$y - \frac{49}{y} = 48 \,\Big|\cdot y,$$

$$y^2 - 49 = 48y,$$

$$y^2 - 48y - 49 = 0.$$

Remkimės Vijeto teorema:

$$\begin{cases} y_1 \cdot y_2 = -49, \\ y_1 + y_2 = 48. \end{cases}$$

Šios sistemos sprendinius nesunku atspėti:

$$y_1 = 49, \quad y_2 = -1.$$

Kadangi $-1 < 0$, tai šį sprendinį atmetame, $y = 49$.
Grįžtame prie x:

$$7^x = 49, \quad 7^x = 7^2, \quad x = 2.$$

Atsakymas. 2.

Trigonometrinių funkcijų išvestinės

K5 (4.1–4.2)

1. Apskaičiuokite funkcijų išvestines.
$f(x) = \sin x$; $g(x) = \sin(5x)$; $h(x) = 5\sin x$; $l(x) = \sin x + 5$;
$m(x) = \sin(x+5)$; $t(x) = \sin^5 x$; $n(x) = 5\sin^5(5x+5)^5 + 5\pi$.

2. Apskaičiuokite funkcijos $f(x)$ išvestinę.

a) $f(x) = \sin(5x) - \cos(\pi - x)$;
b) $f(x) = \cos^2(3x)$;
c) $f(x) = \operatorname{tg}(1-2x) + \operatorname{ctg} x$;
d) $f(x) = x^2\cos\left(2x^2\right) + 5\pi$;
e) $f(x) = \frac{3x}{2\cos\left(\frac{x}{4}\right)}$;
f) $f(x) = x^3\operatorname{tg}\left(2\sqrt{x}\right)$.

3. a) Kurių funkcijos $f(x) = \sin x$ grafiko taškų liestinės yra lygiagrečios tiesei $y = -x$?
b) Raskite abscises taškų, kuriuose nubrėžtos funkcijos $f(x) = \cos x$ grafiko liestinės yra statmenos tiesei $y = 2x - 1$.
c) Kurių funkcijos $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - \cos x + x$ grafiko taškų liestinės su Ox ašimi sudaro $45°$? Raskite tų taškų abscises.

4. a) Įrodykite, kad funkcija $g(x) = 2x + \cos^2 x$ yra didėjanti visoje jos apibrėžimo srityje.
b) Įrodykite, kad funkcija $g(x) = -2{,}5x + 2\sin x \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ yra mažėjanti visoje jos apibrėžimo srityje.

5. Raskite funkcijos $f(x)$ kritinius taškus.
a) $f(x) = x - 2\sin x$;
b) $f(x) = \sin^2 x - \cos x$;
c) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}x$.

6. Raskite $f'(x_0)$, kai:
a) $f(x) = (x^2 - 2x + 15)\cdot\sin(3x)$, $x_0 = 0$;
b) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\left(\operatorname{tg}(\pi x) + 1\right)$, $x_0 = 1$;
c) $f(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{x^2}{\pi}$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

7. a) Įrodykite, kad $f'(x) = g'(x)$, kai:
$f(x) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$, $g(x) = 1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

b) Išspręskite lygtį $f(x) = g'\left(\frac{\pi}{6}\right)$, kai:
$f(x) = \sin^2 x + \cos^2(2x)$, $g(x) = \sin(2x)$.

1. Apskaičiuokite funkcijų išvestines.

a) $f(x) = \cos x$, $g(x) = \cos(5x)$, $h(x) = 5\cos x$,
$l(x) = \cos x + 5$, $m(x) = \cos(x+5)$, $t(x) = \cos^5 x$,
$n(x) = 5\cos^5(5x+5)^5 + 5\pi$;

b) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = \operatorname{tg}(5\pi - x)$, $h(x) = 2\operatorname{tg}(\sqrt{x} - \pi)$,
$l(x) = 7\operatorname{tg}^7(5x^7 - 3x) + 2x - \pi$;

c) $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $g(x) = \operatorname{ctg}(5x^2 - 3x + \pi)$, $h(x) = \sqrt{\operatorname{ctg}\sqrt[3]{x}} + \operatorname{ctg}\pi$.

2. Apskaičiuokite funkcijos $f(x)$ išvestinę.

a) $f(x) = \cos(4x)$;
b) $f(x) = \sin^3(3x)$;
c) $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg}(1 - 3x)$;
d) $f(x) = x^4\cos\left(5x^2\right) + 8\pi$;
e) $f(x) = \frac{4x}{3\sin\left(\frac{x}{6}\right)}$;
f) $f(x) = x^2\operatorname{ctg}\left(3\sqrt{x}\right)$.

3. a) Kurių funkcijos $f(x) = \cos x$ grafiko taškų liestinės yra lygiagrečios tiesei $y = \frac{1}{2}x + 2$? Raskite tų taškų abscises.

b) Raskite taškus, kuriuose funkcijos $f(x) = \sin x$ grafiko liestinės yra statmenos tiesei $y = -x$.

c) Kurių funkcijos $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + 3\sin x + x$ grafiko taškų liestinės su Ox ašimi sudaro 135° kampą? Raskite tų taškų abscises.

4. a) Įrodykite, kad funkcija $g(x) = \sin^2 x - \cos^2 x - 3{,}2x$ yra mažėjanti visoje jos apibrėžimo srityje.

b) Įrodykite, kad funkcija $g(x) = 3x - \sin^2 x$ yra didėjanti visoje jos apibrėžimo srityje.

5. Raskite funkcijos $f(x)$ kritinius taškus.

a) $f(x) = x + 2\cos x$;

b) $f(x) = \cos^2 x + \sin x$;

c) $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

6. Raskite $f'(x_0)$, kai:

a) $f(x) = (x^3 - 1)\cdot\operatorname{tg}(\pi x)$, $x_0 = 1$;

b) $f(x) = x\sin(\pi x) + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, $x_0 = 1$;

c) $f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos\frac{\pi}{6} + \frac{x^2}{\pi}$, $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

7. a) Įrodykite, kad $f'(x) = g'(x)$, kai:
$f(x) = \frac{\sin(2x)}{1+\cos(2x)}$, $g(x) = \operatorname{tg} x$.

b) Išspręskite lygtį $f(x) = g'\left(\frac{\pi}{12}\right)$, kai:
$f(x) = \sin^2 x + \sin^2(2x)$, $g(x) = -\cos(2x)$.

Trigonometrinių funkcijų išvestinės

K5 (4.1–4.2)

1. Apskaičiuokite funkcijų išvestines.
$f(x) = \sin x$; $g(x) = \sin(5x)$; $h(x) = 5\sin x$; $l(x) = \sin x + 5$;
$m(x) = \sin(x+5)$; $t(x) = \sin^5 x$; $n(x) = 5\sin^5(5x+5)^5 + 5\pi$.

$(\sin t)' = \cos t \cdot t'$

$f'(x) = (\sin x)' = \cos x$;

$g'(x) = \left[\sin(5x)\right]' = \cos(5x)\cdot(5x)' = 5\cos(5x)$;

$h'(x) = (5\sin x)' = 5\cdot(\sin x)' = 5\cos x$;

$l'(x) = (\sin x + 5)' = (\sin x)' + 5' = \cos x + 0 = \cos x$;

$m'(x) = \left[\sin(x+5)\right]' = \cos(x+5)\cdot(x+5)' = \cos(x+5)\cdot 1 = \cos(x+5)$;

$t'(x) = [\sin^5 x]' = 5\sin^4 x\cdot(\sin x)' = 5\sin^4 x\cdot\cos x$;

$$
\begin{aligned}
n'(x) &= \left[5\sin^5(5x+5)^5 + 5\pi\right]' = \\
&= \left[5\sin^5(5x+5)^5\right]' + (5\pi)' = \\
&= 5\cdot 5\sin^4(5x+5)^5\cdot\left[\sin(5x+5)^5\right]' + 0 = \\
&= 25\sin^4(5x+5)^5\cdot\cos(5x+5)^5\cdot\left[(5x+5)^5\right]' = \\
&= 25\sin^4(5x+5)^5\cdot\cos(5x+5)^5\cdot 5\cdot(5x+5)^4\cdot(5x+5)' = \\
&= 125\sin^4(5x+5)^5\cdot\cos(5x+5)^5\cdot(5x+5)^4\cdot 5 = \\
&= 625\sin^4(5x+5)^5\cdot\cos(5x+5)^5\cdot(5x+5)^4.
\end{aligned}
$$

2. Apskaičiuokite funkcijos $f(x)$ išvestinę.

a) $f(x) = \sin(5x) - \cos(\pi - x)$;
b) $f(x) = \cos^2(3x)$;
c) $f(x) = \operatorname{tg}(1-2x) + \operatorname{ctg} x$;
d) $f(x) = x^2\cos\left(2x^2\right) + 5\pi$;
e) $f(x) = \frac{3x}{2\cos\left(\frac{x}{4}\right)}$;
f) $f(x) = x^3\operatorname{tg}\left(2\sqrt{x}\right)$.

$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

2a. $f(x) = \sin(5x) - \cos(\pi - x)$,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\sin(5x) - \cos(\pi - x)\right]' = \left[\sin(5x)\right]' - \left[\cos(\pi - x)\right]' = \\
&= \cos(5x)\cdot(5x)' - \left(-\sin(\pi - x)\cdot(\pi - x)'\right) = \\
&= 5\cos(5x) + \sin(\pi - x)\cdot(-1) = 5\cos(5x) - \sin(\pi - x).
\end{aligned}
$$

Atsakymas. $5\cos(5x) - \sin(\pi - x) = 5\cos(5x) - \sin x$.

2b. $f(x) = \cos^2(3x)$,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\cos^2(3x)\right]' = 2\cos(3x)\cdot\left[\cos(3x)\right]' = \\
&= 2\cos(3x)\cdot\left(-\sin(3x)\cdot(3x)'\right) = \\
&= 2\cos 3x\cdot\left(-\sin(3x)\cdot 3\right) = -6\cos(3x)\cdot\sin(3x).
\end{aligned}
$$

Atsakymas. $-6\cos(3x)\sin(3x) = -3\sin(6x)$.

2c. $f(x)=\operatorname{tg}(1-2x)+\operatorname{ctg}x,$

$$f'(x)=\left[\operatorname{tg}(1-2x)+\operatorname{ctg}x\right]'=\left[\operatorname{tg}(1-2x)\right]'+[\operatorname{ctg}x]'=$$
$$=\frac{1}{\cos^2(1-2x)}\cdot(1-2x)'-\frac{1}{\sin^2 x}=$$
$$=-\frac{2}{\cos^2(1-2x)}-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Atsakymas. $-\frac{2}{\cos^2(1-2x)}-\frac{1}{\sin^2 x}.$

2d. $f(x)=x^2\cos\left(2x^2\right)+5\pi,$

$$f'(x)=\left[x^2\cos\left(2x^2\right)+5\pi\right]'=\left[x^2\cdot\cos\left(2x^2\right)\right]'+(5\pi)'=$$
$$=\left(x^2\right)'\cdot\cos\left(2x^2\right)+x^2\cdot\left[\cos\left(2x^2\right)\right]'+0=$$
$$=2x\cos\left(2x^2\right)+x^2\cdot\left(-\sin\left(2x^2\right)\right)\cdot\left(2x^2\right)'=$$
$$=2x\cos\left(2x^2\right)-x^2\cdot\sin\left(2x^2\right)\cdot 4x=$$
$$=2x\cos\left(2x^2\right)-4x^3\sin\left(2x^2\right).$$

Atsakymas. $2x\cos\left(2x^2\right)-4x^3\sin\left(2x^2\right).$

2e. $f(x)=\frac{3x}{2\cos\left(\frac{x}{4}\right)},$

$$f'(x)=\left[\frac{3x}{2\cos\left(\frac{x}{4}\right)}\right]'=\frac{(3x)'\cdot 2\cos\left(\frac{x}{4}\right)-\left[2\cos\left(\frac{x}{4}\right)\right]'\cdot 3x}{\left(2\cos\left(\frac{x}{4}\right)\right)^2}=$$
$$=\frac{3\cdot 2\cos\left(\frac{x}{4}\right)-2\cdot\left(-\sin\left(\frac{x}{4}\right)\right)\cdot\left(\frac{x}{4}\right)'\cdot 3x}{4\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)}=$$
$$=\frac{6\cos\left(\frac{x}{4}\right)+6x\sin\left(\frac{x}{4}\right)\cdot\frac{1}{4}}{4\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)}=\frac{6\cos\left(\frac{x}{4}\right)+\frac{3}{2}x\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{4\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)}.$$

Atsakymas. $\frac{6\cos\left(\frac{x}{4}\right)+\frac{3}{2}x\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{4\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)}.$

2f. $f(x)=x^3\operatorname{tg}\left(2\sqrt{x}\right),$

$$f'(x)=\left[x^3\cdot\operatorname{tg}\left(2\sqrt{x}\right)\right]'=\left(x^3\right)'\cdot\operatorname{tg}\left(2\sqrt{x}\right)+x^3\cdot\left[\operatorname{tg}\left(2\sqrt{x}\right)\right]'=$$
$$=3x^2\operatorname{tg}\left(2\sqrt{x}\right)+x^3\cdot\frac{1}{\cos^2\left(2\sqrt{x}\right)}\cdot\left(2\sqrt{x}\right)'=$$
$$=3x^2\operatorname{tg}\left(2\sqrt{x}\right)+\frac{x^3\cdot 2\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{\cos^2\left(2\sqrt{x}\right)}=3x^2\operatorname{tg}\left(2\sqrt{x}\right)+\frac{x^3}{\sqrt{x}\cos^2\left(2\sqrt{x}\right)}.$$

Atsakymas. $3x^2\operatorname{tg}\left(2\sqrt{x}\right)+\frac{x^3}{\sqrt{x}\cos^2\left(2\sqrt{x}\right)}=3x^2\operatorname{tg}\left(2\sqrt{x}\right)+\frac{x^2\sqrt{x}}{\cos^2\left(2\sqrt{x}\right)}.$

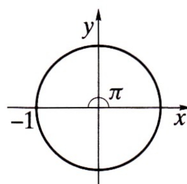
3a. Kurių funkcijos $f(x) = \sin x$ grafiko taškų liestinės yra lygiagrečios tiesei $y = -x$?

> Funkcijos $y = f(x)$ grafiko liestinė, einanti per grafiko tašką $(x_0; y_0)$, yra tiesė $(y = k \cdot x + b)$. Tos tiesės krypties koeficientas k lygus funkcijos išvestinei taške x_0:
>
> $$k = f'(x_0).$$

Liestinės ir tiesės $y = -x$ krypčių koeficientai turi būti vienodi. Kadangi tiesės $y = -x$ krypties koeficientas lygus -1, tai liestinės eis per grafiko taškus, kurių abscisės (x koordinatės) tenkina lygtį:

$$f'(x) = -1.$$

Sprendžiame lygtį:



$$(\sin x)' = -1,$$
$$\cos x = -1,$$
$$x = \pi + 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Vadinasi, per funkcijos $f(x) = \sin x$ grafiko taškus, kurių abscisės (x koordinatės) yra $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, nubrėžtos liestinės yra lygiagrečios tiesei $y = -x$.
Randame tų taškų koordinates y:

$$y = \sin(\pi + 2\pi k) = 0.$$

Atsakymas. $(\pi + 2\pi k; 0)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

3b. Raskite abscises taškų, kuriuose nubrėžtos funkcijos $f(x) = \cos x$ grafiko liestinės yra statmenos tiesei $y = 2x - 1$.

> Statmenų tiesių $y_1 = k_1 \cdot x + b_1$ ir $y_2 = k_2 \cdot x + b_2$ krypčių koeficientų sandauga lygi -1, t. y. $y_1 \perp y_2 \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$.

Tiesės $y = 2x - 1$ krypties koeficientas $k = 2$.
Ieškome grafiko taškų, kurių x koordinatės tenkina sąlygą

$$f'(x) \cdot 2 = -1.$$

Skaičiuojame $f'(x)$:

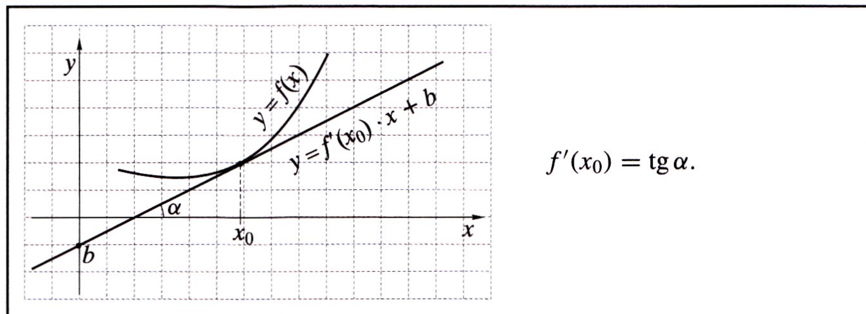
$$f'(x) = (\cos x)' = -\sin x.$$

Sprendžiame lygtį $-\sin x \cdot 2 = -1$:

$$\sin x = \frac{1}{2},$$
$$x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z},$$
$$x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n.$$

Atsakymas. $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

3c. Kurių funkcijos $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - \cos x + x$ grafiko taškų liestinės su Ox ašimi sudaro $45°$? Raskite tų taškų abscises.



$f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha.$

Apskaičiuojame duotojo kampo tangentą:

$$\operatorname{tg} 45° = 1.$$

Vadinasi, reikia rasti tas x reikšmes, su kuriomis teisinga lygybė:

$$f'(x) = 1.$$

Randame $f'(x)$:

$$f'(x) = \left[\frac{1}{2}\sin(2x) - \cos x + x\right]' =$$
$$= \frac{1}{2}\cos(2x)\cdot 2 + \sin x + 1 = \cos(2x) + \sin x + 1.$$

Sprendžiame lygtį:

$$\cos(2x) + \sin x + 1 = 1,$$
$$\cos(2x) + \sin x = 0.$$

$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$

Kosinusą keičiame sinusu:

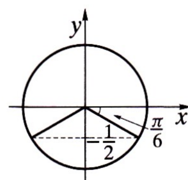
$$1 - 2\sin^2 x + \sin x = 0,$$
$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0.$$

Pažymėkime $\sin x = y$, $y \in [-1; 1]$:

$$2y^2 - y - 1 = 0,$$
$$D = 9, \quad y_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}, \quad y_2 = \frac{1+3}{4} = 1.$$

Grįžtame prie x. Kai $y = -\frac{1}{2}$, tai $\sin x = -\frac{1}{2}$.

$\sin x = a, \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}, \quad \lvert a \rvert \leqslant 1;$ $\arcsin a \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$

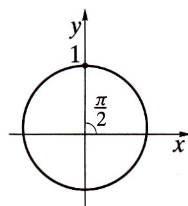


$$x = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z},$$

$$x = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \pi n,$$

$$x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n.$$

Kai $y = 1$, tai



$$\sin x = 1,$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$$

Vadinasi, per funkcijos $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - \cos x + x$ grafiko taškus, kurių

$$x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z} \quad \text{ir} \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z},$$

nubrėžtos liestinės su Ox ašimi sudaro 45° kampą.

Atsakymas. $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ n, k \in \boldsymbol{Z}.$

4.

Jei funkcijos išvestinė tam tikrame intervale yra teigiama, tai funkcijos reikšmės tame intervale didėja.

4a. Įrodykite, kad funkcija $g(x) = 2x + \cos^2 x$ yra didėjanti visoje jos apibrėžimo srityje.

Raskime duotosios funkcijos apibrėžimo sritį, t. y. tas x reikšmes, su kuriomis reiškinys $2x + \cos^2 x$ turi prasmę.
Akivaizdu, kad su visomis x reikšmėmis duotoji funkcija yra apibrėžta:

$$x \in (-\infty; +\infty).$$

Randame $f'(x)$:

$$\left(2x + \cos^2 x\right)' = 2 + 2\cos x \cdot (\cos x)' = 2 - 2\cos x \sin x.$$

Reikia įrodyti, kad

$$2 - 2\cos x \sin x > 0,$$

$$2 - \sin(2x) > 0,$$

$$\sin(2x) < 2.$$

Akivaizdu, kad ši nelygybė yra teisinga su visais x, nes $-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$.
Vadinasi, išvestinė $f'(x) > 0$, todėl $f(x)$ yra didėjanti.

4b. Įrodykite, kad funkcija $g(x) = -2{,}5x + 2\sin x \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ yra mažėjanti visoje jos apibrėžimo srityje.

> Jeigu funkcijos išvestinė tam tikrame intervale yra neigiama, tai funkcijos reikšmės tame intervale mažėja.

Reiškinys $-2{,}5x + 2\sin x \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$ turi prasmę su visomis x reikšmėmis, todėl funkcija apibrėžta visoje realiųjų skaičių aibėje:

$$D(f) = \boldsymbol{R}, \quad \text{t. y.} \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Pastebėkime, kad funkcijos reiškinį galima pakeisti paprastesniu.

> $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x; \quad 2\sin x\cos x = \sin(2x).$

$-2{,}5x + 2\sin x \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -2{,}5x - 2\sin x\cos x = -2{,}5x - \sin(2x).$
Raskime funkcijos išvestinę:

$$f'(x) = \left[-2{,}5x - \sin(2x)\right]' = -2{,}5 - \cos(2x) \cdot (2x)' = -2{,}5 - 2\cos(2x).$$

Reikia įrodyti, kad su visais x išvestinė yra neigiama. Sprendžiame nelygybę:

$$-2{,}5 - 2\cos(2x) < 0,$$
$$-2\cos(2x) < 2{,}5,$$
$$\cos(2x) > -1{,}25.$$

Su visomis x reikšmėmis kosinusas yra ne mažesnis už -1.
Vadinasi, gautoji nelygybė yra teisinga su visais x, išvestinė neigiama ir $f(x)$ yra mažėjanti.

5. Raskite funkcijos $f(x)$ kritinius taškus.
a) $f(x) = x - 2\sin x$; b) $f(x) = \sin^2 x - \cos x$; c) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}x$.

> Funkcijos $f(x)$ apibrėžimo srities taškai ($x \in D(f)$), kuriuose funkcijos išvestinė lygi nuliui ($f'(x) = 0$) arba neegzistuoja, vadinami funkcijos kritiniais taškais.

5a. $f(x) = x - 2\sin x$.

Randame funkcijos išvestinę:

$$f'(x) = (x - 2\sin x)' = 1 - 2\cos x.$$

Matome, kad išvestinė apibrėžta su visais x (reiškinys $1 - 2\cos x$ turi prasmę, kai $x \in (-\infty; +\infty)$), vadinasi, nėra x reikšmių, su kuriomis išvestinė neegzistuoja.
Randame tas x reikšmes, su kuriomis išvestinė lygi 0. Sprendžiame lygtį:

$$1 - 2\cos x = 0, \quad \cos x = \frac{1}{2}.$$

$$\cos x = a, \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}$$

$$x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z},$$
$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n.$$

Atsakymas. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}.$

5b. $f(x) = \sin^2 x - \cos x.$

Randame funkcijos išvestinę:

$$f'(x) = \left(\sin^2 x - \cos x\right)' = 2\sin x \cdot (\sin x)' + \sin x = 2\sin x \cos x + \sin x.$$

Sprendžiame lygtį:

$$2\sin x \cos x + \sin x = 0,$$
$$\sin x(2\cos x + 1) = 0.$$

Sandauga lygi 0, kai bent vienas iš dauginamųjų lygus 0. Gauname:

$\sin x = 0,$ arba $2\cos x + 1 = 0,$

$x = \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z},$

$$\cos x = -\frac{1}{2},$$
$$x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z},$$
$$x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n,$$
$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n.$$

Atsakymas. $x = \pi k,\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ k, n \in \boldsymbol{Z}.$

5c. $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}x.$

Skaičiuojame funkcijos išvestinę:

$$f'(x) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}x\right)' = -\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{6} - x\right)' - \frac{\sqrt{2}}{2} =$$
$$= \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Sprendžiame lygtį:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0, \quad \sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\sin x = a, \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}$$

$$\frac{\pi}{6} - x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi n, \qquad n \in \mathbf{Z},$$
$$\frac{\pi}{6} - x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n,$$
$$-x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + \pi n \ \big| \cdot (-1),$$
$$x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} - \pi n.$$

Atsakymas. $x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} - \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

6. Kai kurių kampų sinuso, kosinuso, tangento ir kotangento reikšmių lentelė ($\pi = 180°$).

$x =$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x =$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x =$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x =$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{ctg} x =$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

6a. Raskite $f'(x_0)$, kai $f(x) = (x^2 - 2x + 15) \cdot \sin(3x), \quad x_0 = 0$.

$$f'(x) = \left[(x^2 - 2x + 15) \cdot \sin(3x)\right]' =$$
$$= \left(x^2 - 2x + 15\right)' \cdot \sin(3x) + (x^2 - 2x + 15) \cdot \left[\sin(3x)\right]' =$$
$$= (2x - 2) \cdot \sin(3x) + (x^2 - 2x + 15) \cdot \cos(3x) \cdot 3;$$
$$f'(0) = (2 \cdot 0 - 2) \cdot \sin(3 \cdot 0) + (0^2 - 2 \cdot 0 + 15) \cdot \cos(3 \cdot 0) \cdot 3 =$$
$$= -2 \sin 0 + 45 \cos 0 = -2 \cdot 0 + 45 \cdot 1 = 45.$$

Atsakymas. 45.

6b. Raskite $f'(x_0)$, kai $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \left(\operatorname{tg}(\pi x) + 1\right), \quad x_0 = 1$.

$$f'(x) = \left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \left(\operatorname{tg}(\pi x) + 1\right)\right]' =$$
$$= \left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]' \cdot \left(\operatorname{tg}(\pi x) + 1\right) + \left[\operatorname{tg}(\pi x) + 1\right]' \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) =$$
$$= -\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \left(\frac{\pi x}{2}\right)' \cdot \left(\operatorname{tg}(\pi x) + 1\right) + \frac{1}{\cos^2(\pi x)} \cdot (\pi x)' \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) =$$
$$= -\frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cdot \left(\operatorname{tg}(\pi x) + 1\right) + \frac{\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos^2(\pi x)};$$

$$f'(1) = -\frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi \cdot 1}{2}\right) \cdot \left(\operatorname{tg}(\pi \cdot 1) + 1\right) + \frac{\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot 1}{2}\right)}{\cos^2(\pi \cdot 1)} =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot (\operatorname{tg}\pi + 1) + \frac{\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos^2 \pi} =$$

$$= -\frac{\pi}{2} \cdot 1 \cdot (0 + 1) + \frac{\pi \cdot 0}{(-1)^2} = -\frac{\pi}{2} \cdot 1 + 0 = -\frac{\pi}{2}.$$

Atsakymas. $-\frac{\pi}{2}$.

6c. Raskite $f'(x_0)$, kai $f(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{x^2}{\pi}$, $\quad x_0 = \frac{\pi}{6}$.

$$f'(x) = \left[\sqrt{3} \cdot \cos x + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{x^2}{\pi}\right]' = -\sqrt{3}\sin x + 0 + \frac{2x}{\pi} = -\sqrt{3}\sin x + \frac{2x}{\pi};$$

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \frac{2 \cdot \frac{\pi}{6}}{\pi} = -\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}.$$

Atsakymas. $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}$.

7a. Įrodykite, kad $f'(x) = g'(x)$, kai $f(x) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$, $\quad g(x) = 1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)$.

I būdas.

$$f'(x) = \left[\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right]' = \frac{(1-\cos x)' \cdot (1+\cos x) - (1-\cos x) \cdot (1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\sin x \cdot (1+\cos x) + (1-\cos x) \cdot \sin x}{(1+\cos x)^2} =$$

$$= \frac{\sin x + \sin x \cdot \cos x + \sin x - \sin x \cdot \cos x}{(1+\cos x)^2} = \frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2};$$

$$g'(x) = \left[1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]' = 2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left[\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right]' = 2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Reikia įrodyti, kad teisinga lygybė

$$\frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Eikime prie argumento $\frac{x}{2}$.

$$\boxed{\sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right), \quad 1 + \cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right).}$$

$$\frac{4\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} \stackrel{?}{=} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}, \qquad \frac{4\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{4\cos^4\left(\frac{x}{2}\right)} \stackrel{?}{=} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

$$\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^3\left(\frac{x}{2}\right)} \stackrel{?}{=} \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}, \qquad \boxed{\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^3\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^3\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Taigi abiejų pusių išraiškos tapo vienodomis.

II būdas.

Pertvarkykime funkciją $f(x)$:

$$\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}=\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

Akivaizdu, kad $\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)$ ir $1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)$ išvestinės yra lygios, nes $1'=0$.

7b. Išspręskite lygtį $f(x)=g'\left(\frac{\pi}{6}\right)$, kai $f(x)=\sin^2 x+\cos^2(2x)$, $g(x)=\sin(2x)$.

$$g'(x)=\left[\sin(2x)\right]'=\cos(2x)\cdot(2x)'=2\cos(2x),$$
$$g'\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\cdot\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right)=2\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

Sprendžiame lygtį:

$$\sin^2 x+\cos^2(2x)=1,\quad \sin^2 x=1-\cos^2(2x).$$

$1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha,\quad \sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha.$

$$\sin^2 x=\sin^2(2x),$$
$$\sin^2 x=(2\sin x\cos x)^2,$$
$$\sin^2 x-4\sin^2 x\cos^2 x=0,$$
$$\sin^2 x\left(1-4\cos^2 x\right)=0,$$
$$\sin^2 x=0\quad\text{arba}\quad 1-4\cos^2 x=0,$$
$$\sin x=0;\qquad \cos^2 x=\frac{1}{4},\quad \cos x=-\frac{1}{2},\quad \cos x=\frac{1}{2}.$$

Lygties $\sin x=0$ sprendiniai:

$$x=\pi n,\ n\in \boldsymbol{Z}.$$

Lygties $\cos x=-\frac{1}{2}$ sprendiniai:

$$x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi k,$$
$$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\quad k\in \boldsymbol{Z}.$$

Lygties $\cos x=\frac{1}{2}$ sprendiniai:

$$x=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi l,$$
$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi l,\quad l\in \boldsymbol{Z}.$$

Atsakymas. $x=\pi n$, $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi l$; $n,k,l\in \boldsymbol{Z}$.

Rodiklinės, logaritminės ir laipsninės funkcijų išvestinės

K6 (5.1–5.4)

1. Raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę.

a) $f(x) = e^{3-4x}$;
b) $f(x) = 4e^{\frac{x}{2}} - e^{3x}$;
c) $f(x) = \frac{\pi}{x^2} + \sqrt[4]{x^5} + 2^x$;
d) $f(x) = x^2 \cdot 3^{-x}$;
e) $f(x) = \frac{x}{\lg x}$;
f) $f(x) = \log_{0,3}\left(x^2 - 3x\right)$.

2. Išspręskite lygtį (punkte c) — nelygybę).

a) $f'(x) = 2f(x)$, kai $f(x) = e^{-x}\left(x^2 + 3x + 1\right)$;
b) $f'(x) = g'(x)$, kai $f(x) = 3\ln(x-2) - 1$, $g(x) = 3x + \ln 2$;
c) $f'(x) > g'(x)$, kai $f(x) = \sin x + 2\ln(x-3)$, $g(x) = \sin x - 0{,}5x^2$.

3. Apskaičiuokite:

a) $f'(4)$, kai $f(x) = 2x\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}$;
b) $f'(6)$, kai $f(x) = \lg\left(\frac{x}{3} - 1\right)$;
c) $f'(0)$, kai $f(x) = \sqrt[4]{x^3+1} \cdot \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[5]{4}$.

4. Raskite funkcijos $f(x) = \ln(7x - x^2 - 6)$:

a) apibrėžimo sritį;
b) kritinius taškus;
c) reikšmių didėjimo ir reikšmių mažėjimo intervalus;
d) ekstremumo taškus.

5. Parašykite funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės, einančios per tašką, kurio abscisė x_0, lygtį.

a) $f(x) = 3^x$, $x_0 = 1$;
b) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$;
c) $f(x) = \ln(3x - 2)$, x_0 — taškas, kuriame $f(x)$ grafikas kerta Ox ašį.

6. Raskite funkcijos $f(x)$ reikšmių didėjimo ir reikšmių mažėjimo intervalus.

a) $f(x) = x^2e^x$;
b) $f(x) = \frac{x^3}{\ln x}$;
c) $f(x) = 2\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} - 3$.

7. Tuo pačiu metu atsukus vandens čiaupą ir atidarius ištekamąjį vamzdį, indas pripildomas vandens per 36 minutes. Jei čiaupas ir ištekamasis vamzdis būtų atsukti 6 minutes, o tada ištekamasis vamzdis būtų uždarytas, tai tas indas prisipildytų per kitas 10 minučių. Per kiek minučių prisipildytų indas, jei čiaupas būtų atsuktas, o ištekamasis vamzdis uždarytas?

1. Raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę.

a) $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}$;
b) $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 3\mathrm{e}^{11x}$;
c) $f(x) = 5^x + \frac{5}{x^2} - \sqrt[4]{x}$;
d) $f(x) = x^4 \cdot 0{,}7^{-x}$;
e) $f(x) = \frac{\lg x}{x}$;
f) $f(x) = \log_{0,3}(4 - 3x)$.

2. Išspręskite lygtį (punkte c) — nelygybę).
a) $f'(x) = 0$, kai $f(x) = x^3 \ln x$;
b) $\sqrt{f'(x)} = g'(x)$, kai $f(x) = 3x - 12\ln(x+3)$, $g(x) = 20\sqrt{x+3} - x$;
c) $3x^2 - g(x) < 9x - f'(1)$, kai $f(x) = \frac{2x^2-1}{3x-2} - \cos(\pi x)$, $g(x) = x - 2$.

3. Apskaičiuokite:
a) $f'(4)$, kai $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{3+x}$;
b) $f'\left(\frac{2}{3}\right)$, kai $f(x) = \lg(3x+1)$;
c) $f'(0)$, kai $f(x) = \sqrt[3]{x^3+1} \cdot \sqrt[4]{x+1} + \sqrt[3]{4}$.

4. Raskite funkcijos $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$:
a) apibrėžimo sritį;
b) kritinius taškus;
c) reikšmių didėjimo ir reikšmių mažėjimo intervalus;
d) ekstremumo taškus.

5. Parašykite funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės, einančios per tašką, kurio abscisė x_0, lygtį.
a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x_0 = 0$;
b) $f(x) = \mathrm{e}^x$, $x_0 = 1$;
c) $f(x) = \ln(2x - 3)$, x_0 — taškas, kuriame $f(x)$ grafikas kerta Ox ašį.

6. Raskite funkcijos $f(x)$ reikšmių didėjimo ir reikšmių mažėjimo intervalus.
a) $f(x) = x^3 \cdot \mathrm{e}^x$;
b) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$;
c) $f(x) = 3\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 2$.

7. Pirmas aštuonias valandas vanduo į baseiną tekėjo vienu vamzdžiu. Tada buvo atidarytas ir antrasis vamzdis. Po 4 valandų baseinas buvo pilnas. Jei antrasis vamzdis būtų atidarytas praėjus 10,5 valandos po pirmojo vamzdžio, tai baseinas prisipildytų per 3 valandas bendro darbo. Per kiek laiko kiekvienu vamzdžiu atskirai galima pripildyti baseiną?

Rodiklinės, logaritminės ir laipsninės funkcijų išvestinės

K6 (5.1–5.4)

1. Raskite funkcijos $f(x)$ išvestinę.

a) $f(x)=\mathrm{e}^{3-4x}$;
b) $f(x)=4\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{3x}$;
c) $f(x)=\frac{\pi}{x^2}+\sqrt[4]{x^5}+2^x$;
d) $f(x)=x^2\cdot 3^{-x}$;
e) $f(x)=\frac{x}{\lg x}$;
f) $f(x)=\log_{0,3}\left(x^2-3x\right)$.

$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x,\quad \left(\mathrm{e}^{f(x)}\right)'=\mathrm{e}^{f(x)}\cdot f'(x),\quad \mathrm{e}\approx 2{,}7...;$
$(a^x)'=a^x\cdot\ln a,\quad \left(a^{f(x)}\right)'=a^{f(x)}\cdot\ln a\cdot f'(x),\quad a$ — skaičius;
$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln a},\quad (\log_a f(x))'=\frac{f'(x)}{f(x)\cdot\ln a},\quad \ln a=\log_{\mathrm{e}} a.$

1a. $f'(x)=\left(\mathrm{e}^{3-4x}\right)'=\mathrm{e}^{3-4x}\cdot(3-4x)'=\mathrm{e}^{3-4x}\cdot(-4)=-4\mathrm{e}^{3-4x}.$

1b.
$$f'(x)=\left(4\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-\mathrm{e}^{3x}\right)'=4\cdot\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\right)'-\left(\mathrm{e}^{3x}\right)'=4\cdot\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'-\mathrm{e}^{3x}\cdot(3x)'=$$
$$=4\cdot\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}-\mathrm{e}^{3x}\cdot 3=2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-3\mathrm{e}^{3x}.$$

1c.
$$f'(x)=\left(\frac{\pi}{x^2}+\sqrt[4]{x^5}+2^x\right)'=\left(\pi\cdot x^{-2}\right)'+\left(x^{\frac{5}{4}}\right)'+\left(2^x\right)'=$$
$$=\pi\cdot(-2)\cdot x^{-3}+\frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}}+2^x\cdot\ln 2=-\frac{2\pi}{x^3}+\frac{5}{4}\sqrt[4]{x}+\ln 2\cdot 2^x.$$

1d.
$$f'(x)=\left(x^2\cdot 3^{-x}\right)'=\left(x^2\right)'\cdot 3^{-x}+x^2\cdot\left(3^{-x}\right)'=$$
$$=2x\cdot 3^{-x}+x^2\cdot 3^{-x}\cdot\ln 3\cdot(-x)'=2x\cdot 3^{-x}-\ln 3\cdot x^2\cdot 3^{-x}.$$

1e.
$$f'(x)=\left(\frac{x}{\lg x}\right)'=\frac{x'\cdot\lg x-x\cdot(\lg x)'}{\lg^2 x}=\frac{\lg x-x\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\ln 10}}{\lg^2 x}=\frac{\lg x-\frac{1}{\ln 10}}{\lg^2 x}.$$

1f.
$$f'(x)=\left(\log_{0,3}\left(x^2-3x\right)\right)'=\frac{1}{x^2-3x}\cdot\frac{1}{\ln 0{,}3}\cdot\left(x^2-3x\right)'=\frac{2x-3}{\left(x^2-3x\right)\cdot\ln 0{,}3}.$$

2a. Išspręskite lygtį $f'(x)=2f(x)$, kai $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\left(x^2+3x+1\right)$.

Randame $f'(x)$:

$$\left[\mathrm{e}^{-x}\cdot\left(x^2+3x+1\right)\right]'=\left(\mathrm{e}^{-x}\right)'\cdot\left(x^2+3x+1\right)+\mathrm{e}^{-x}\cdot\left(x^2+3x+1\right)'=$$
$$=\mathrm{e}^{-x}\cdot(-x)'\cdot\left(x^2+3x+1\right)+\mathrm{e}^{-x}\cdot(2x+3)=$$
$$=-\mathrm{e}^{-x}\cdot\left(x^2+3x+1\right)+\mathrm{e}^{-x}\cdot(2x+3)=$$
$$=\mathrm{e}^{-x}\cdot\left(-(x^2+3x+1)+(2x+3)\right)=$$
$$=\mathrm{e}^{-x}\cdot\left(-x^2-3x-1+2x+3\right)=$$
$$=\mathrm{e}^{-x}\cdot\left(-x^2-x+2\right).$$

Sprendžiame lygtį:

$$e^{-x}\left(-x^2-x+2\right)=2\cdot e^{-x}\left(x^2+3x+1\right)\ \big|\cdot e^{x}>0,$$
$$-x^2-x+2=2\left(x^2+3x+1\right),$$
$$-x^2-x+2-2x^2-6x-2=0,$$
$$-3x^2-7x=0,$$
$$-3x\left(x+\frac{7}{3}\right)=0,\quad x=0,\quad x=-\frac{7}{3}.$$

Atsakymas. 0; $-\frac{7}{3}$.

2b. Išspręskite lygtį $f'(x)=g'(x)$, kai $f(x)=3\ln(x-2)-1$, $g(x)=3x+\ln 2$.

$\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}$, $\left(\ln f(x)\right)'=\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)$, $(\ln a)'=0$, a — skaičius.

Randame funkcijų $f(x)$ ir $g(x)$ išvestines:

$$f'(x)=\left(3\ln(x-2)\right)'=3\cdot\frac{1}{x-2}\cdot(x-2)'=\frac{3}{x-2};$$
$$g'(x)=\left(3x+\ln 2\right)'=(3x)'+(\ln 2)'=3+0=3.$$

Sprendžiame lygtį:

$$\frac{3}{x-2}=3\ \big|\cdot(x-2)\neq 0,$$
$$3=3(x-2),\quad 3x-6=3,\quad 3x=9,$$
$$x=3.$$

Patikriname, ar su $x=3$ funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$ yra apibrėžtos.
Funkcija $g(x)=3x+\ln 2$ apibrėžta su visais x, o funkcija $f(x)=3\ln(x-2)-1$ tik su tais x, su kuriais $x-2>0$. Kai $x=3$, tai $3-2>0$.

Atsakymas. 3.

2c. Išspręskite nelygybę $f'(x)>g'(x)$, kai $f(x)=\sin x+2\ln(x-3)$, $g(x)=\sin x-0{,}5x^2$.

Iš pradžių nustatome $f(x)$ ir $g(x)$ bendrą apibrėžimo sritį.
Funkcijos $g(x)=\sin x-0{,}5x^2$ apibrėžimo sritis — visa realiųjų skaičių aibė.
Raskime funkcijos $f(x)=\sin x+2\ln(x-3)$ apibrėžimo sritį. Funkcija $f(x)$ apibrėžta, kai pologaritminis reiškinys teigiamas, t. y.

$$x-3>0,\quad x>3.$$

Vadinasi, tik intervalo $(3;+\infty)$ skaičiai gali būti nelygybės sprendiniai.
Randame duotųjų funkcijų išvestines:

$$f'(x)=\left(\sin x+2\ln(x-3)\right)'=(\sin x)'+2\cdot\left(\ln(x-3)\right)'=$$
$$=\cos x+2\cdot\frac{1}{x-3}\cdot(x-3)'=\cos x+\frac{2}{x-3};$$
$$g'(x)=\left(\sin x-0{,}5x^2\right)'=(\sin x)'-\left(0{,}5x^2\right)'=\cos x-x.$$

Sprendžiame nelygybę:

$$\cos x + \frac{2}{x-3} > \cos x - x,$$

$$\frac{2}{x-3} > -x, \quad \frac{2}{x-3} + x > 0, \quad \frac{2 + x(x-3)}{x-3} > 0,$$

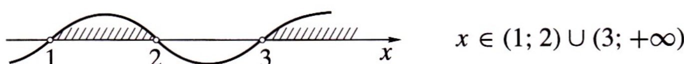
$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x-3} > 0.$$

Nelygybę spręsime intervalų metodu. Skaitiklyje esantį trinarį skaidome dauginamaisiais:

$$x^2 - 3x + 2 = 0, \quad D = 9 - 8 = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2,$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2);$$

$$\frac{(x-1)(x-2)}{x-3} > 0.$$



Prisiminę apibrėžimo sritį, nelygybės sprendinius randame iš sistemos:

$$\begin{cases} x \in (1; 2) \cup (3; +\infty), \\ x \in (3; +\infty); \end{cases} \Rightarrow x \in (3; +\infty).$$

Atsakymas. $x \in (3; +\infty)$.

3a. Apskaičiuokite $f'(4)$, kai $f(x) = 2x\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Randame $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(2x\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)' = \left(2x \cdot x^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}\right)' =$$

$$= \left(2x^{\frac{3}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}}\right)' = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{3}{2}} = 3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x^3}}.$$

Apskaičiuojame $f'(4)$:

$$f'(4) = 3 \cdot \sqrt{4} + \frac{1}{\sqrt{4^3}} = 3 \cdot 2 + \frac{1}{4\sqrt{4}} = 6 + \frac{1}{4 \cdot 2} = 6\frac{1}{8}.$$

Atsakymas. $6\frac{1}{8}$.

3b. Apskaičiuokite $f'(6)$, kai $f(x) = \lg\left(\frac{x}{3} - 1\right)$.

$$f'(x) = \left[\lg\left(\frac{x}{3} - 1\right)\right]' = \frac{1}{\frac{x}{3} - 1} \cdot \frac{1}{\ln 10} \cdot \left(\frac{x}{3} - 1\right)' =$$

$$= \frac{1}{\frac{x-3}{3}} \cdot \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{x-3} \cdot \frac{1}{\ln 10} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{(x-3) \cdot \ln 10};$$

$$f'(6) = \frac{1}{(6-3) \cdot \ln 10} = \frac{1}{3 \ln 10}.$$

Atsakymas. $\frac{1}{3 \ln 10} = \frac{1}{3} \lg e$.

3c. Apskaičiuokite $f'(0)$, kai $f(x) = \sqrt[4]{x^3+1} \cdot \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[5]{4}$.

$$f'(x) = \left(\sqrt[4]{x^3+1} \cdot \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[5]{4}\right)' =$$
$$= \left[\left(x^3+1\right)^{\frac{1}{4}}\right]' \cdot \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[4]{x^3+1} \cdot \left[(x+1)^{\frac{1}{3}}\right]' + \left(\sqrt[5]{4}\right)' =$$
$$= \frac{1}{4}\left(x^3+1\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \left(x^3+1\right)' \cdot \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[4]{x^3+1} \cdot \frac{1}{3}(x+1)^{-\frac{2}{3}} \cdot (x+1)' + 0 =$$
$$= \frac{3x^2 \cdot \sqrt[3]{x+1}}{4\sqrt[4]{(x^3+1)^3}} + \frac{\sqrt[4]{x^3+1}}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}};$$
$$f'(0) = \frac{3 \cdot 0^2 \cdot \sqrt[3]{0+1}}{4\sqrt[4]{(0^3+1)^3}} + \frac{\sqrt[4]{0^3+1}}{3\sqrt[3]{(0+1)^2}} = \frac{0}{4 \cdot 1} + \frac{1}{3 \cdot 1} = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Atsakymas. $\frac{1}{3}$.

4. Raskite funkcijos $f(x) = \ln(7x - x^2 - 6)$:

a) apibrėžimo sritį;
b) kritinius taškus;
c) reikšmių didėjimo ir reikšmių mažėjimo intervalus;
d) ekstremumų taškus.

4a.

> Funkcijos $y = f(x)$ apibrėžimo sritis — tos x reikšmės, su kuriomis reiškinys $f(x)$ turi prasmę.
> $\log_{g(x)} f(x)$ apibrėžtas, kai $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $g(x) \neq 1$.

Pologaritminis reiškinys turi būti teigiamas, todėl x reikšmės turi tenkinti nelygybę:

$$7x - x^2 - 6 > 0,$$
$$-x^2 + 7x - 6 > 0,$$
$$x^2 - 7x + 6 < 0, \qquad x^2 - 7x + 6 = 0,$$
$$D = 25, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 6,$$
$$x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6);$$

$(x-1)(x-6) < 0$, [schema: 1, 6, x] $x \in (1; 6)$.

Atsakymas. $D(f) = (1; 6)$.

4b.

> Funkcijos $f(x)$ apibrėžimo srities reikšmės, su kuriomis $f'(x) = 0$ arba neegzistuoja, vadinamos funkcijos $f(x)$ kritiniais taškais.

Randame $f(x)$ išvestinę:

$$f'(x) = \left[\ln(7x - x^2 - 6)\right]' = \frac{1}{7x - x^2 - 6} \cdot \left(7x - x^2 - 6\right)' = \frac{-2x + 7}{-x^2 + 7x - 6}.$$

$f'(x) = 0$, kai

$$-2x + 7 = 0, \quad x = \frac{7}{2}.$$

$f'(x)$ neegzistuoja, kai

$$-x^2 + 7x - 6 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 6.$$

Bet reikšmės $x = 1$ ir $x = 6$ neįeina į funkcijos apibrėžimo sritį.

Atsakymas. $3\frac{1}{2}$.

4c.

> Jei funkcijos išvestinė intervale yra teigiama, tai funkcijos reikšmės tame intervale didėja; jei išvestinė yra neigiama, tai tame intervale funkcija yra mažėjanti.

Reikia rasti tas x reikšmes, su kuriomis $f'(x) > 0$ — funkcijos reikšmės y didėja; bei tas x reikšmes, su kuriomis $f'(x) < 0$ — funkcijos reikšmės y mažėja.
Nelygybės

$$\frac{-2x + 7}{-x^2 + 7x - 6} > 0$$

sprendiniai yra funkcijos $f(x)$ reikšmių didėjimo intervalai. Sprendžiame šią nelygybę:

$$\frac{-2\left(x - \frac{7}{2}\right)}{-(x-1)(x-6)} > 0,$$

$$\frac{x - \frac{7}{2}}{(x-1)(x-6)} > 0;$$



Kai $x \in (1; 3{,}5) \cup (6; +\infty)$, tai $f'(x) > 0$. Atsižvelgę į funkcijos apibrėžimo sritį $x \in (1; 6)$ nustatome, kad funkcijos reikšmės didėja intervale $(1; 3{,}5)$.

Kai $x \in (-\infty; 1) \cup (3{,}5; 6)$, tai $f'(x) < 0$. Vadinasi, funkcijos reikšmės mažėja intervale $(3{,}5; 6)$.

Atsakymas. Kai $x \in (1; 3{,}5)$, tai funkcija $f(x)$ yra didėjanti;
kai $x \in (3{,}5; 6)$, tai funkcija $f(x)$ yra mažėjanti.

4d.

> Ekstremumų taškuose funkcijos išvestinė (kai ji egzistuoja) lygi 0 ir keičia ženklą.

Remdamiesi **4b** ir **4c** matome, kad $x = 3{,}5$ yra ekstremumo (maksimumo) taškas, nes $f'(3{,}5) = 0$ ir $f'(x)$ taško $x = 3{,}5$ aplinkoje keičia ženklą iš „+" į „−".

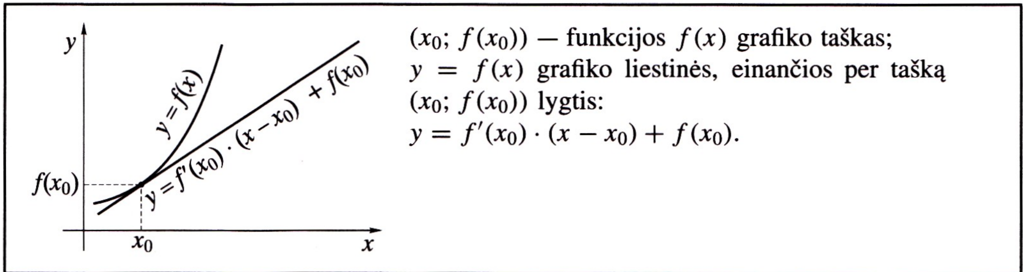
Atsakymas. $x = 3{,}5$.

5. Parašykite funkcijos $f(x)$ grafiko liestinės, einančios per tašką, kurio abscisė x_0, lygtį.

a) $f(x) = 3^x$, $x_0 = 1$;

b) $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$;

c) $f(x) = \ln(3x - 2)$, x_0 — taškas, kuriame $f(x)$ grafikas kerta Ox ašį.



$(x_0;\, f(x_0))$ — funkcijos $f(x)$ grafiko taškas;
$y = f(x)$ grafiko liestinės, einančios per tašką $(x_0;\, f(x_0))$ lygtis:
$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.

5a. $f'(x) = (3^x)' = 3^x \cdot \ln 3, \quad f'(1) = 3^1 \cdot \ln 3 = 3\ln 3, \quad f(1) = 3^1 = 3.$
Liestinės lygtis

$$y = 3\ln 3 \cdot (x - 1) + 3 = 3\ln 3 \cdot x - 3\ln 3 + 3.$$

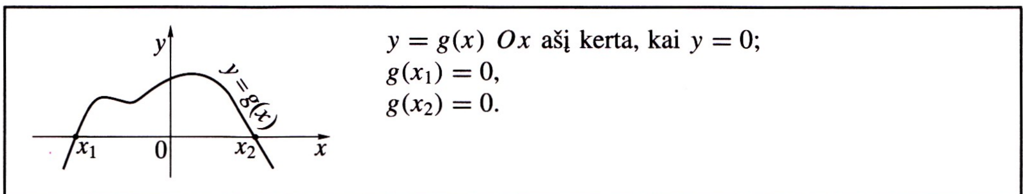
Atsakymas. $y = 3\ln 3 \cdot x - 3\ln 3 + 3.$

5b. $f'(x) = (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x, \quad f'(0) = \mathrm{e}^0 = 1, \quad f(0) = \mathrm{e}^0 = 1.$
Liestinės lygtis

$$y = 1 \cdot (x - 0) + 1 = x + 1.$$

Atsakymas. $y = x + 1.$

5c. $f'(x) = \big(\ln(3x - 2)\big)' = \frac{1}{3x-2} \cdot (3x - 2)' = \frac{3}{3x-2}.$
Randame, kur kreivė $y = \ln(3x - 2)$ kerta Ox ašį. Tuose taškuose $y = 0$.



$y = g(x)$ Ox ašį kerta, kai $y = 0$;
$g(x_1) = 0,$
$g(x_2) = 0.$

Sprendžiame lygtį:

$$\ln(3x - 2) = 0, \quad \mathrm{e}^0 = 3x - 2, \quad 3x - 2 = 1, \quad x = 1.$$

(Kai $x = 1$, tai $3x - 2 > 0$ — pologaritminis reiškinys teigiamas, $f(x)$ yra apibrėžta.)
Vadinasi, turime parašyti lygtį liestinės, einančios per $f(x) = \ln(3x - 2)$ grafiko tašką, kurio abscisė $x = 1$.
Randame $f(1)$:

$$f(1) = \ln(3 \cdot 1 - 2) = \ln 1 = 0.$$

Randame $f'(1)$:

$$f'(1) = \frac{3}{3 \cdot 1 - 2} = 3.$$

Liestinės lygtis:

$$y = 3 \cdot (x - 1) + 0, \quad y = 3x - 3.$$

Atsakymas. $y = 3x - 3.$

6. Raskite funkcijos $f(x)$ reikšmių didėjimo ir reikšmių mažėjimo intervalus.

a) $f(x) = x^2 e^x$;

b) $f(x) = \frac{x^3}{\ln x}$;

c) $f(x) = 2\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} - 3$.

6a. Funkcija $f(x) = x^2 e^x$ apibrėžta su visais x.
Randame $f'(x)$:

$$\left(x^2 \cdot e^x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot e^x + x^2 \cdot \left(e^x\right)' = 2xe^x + x^2 e^x.$$

Ieškome funkcijos reikšmių didėjimo intervalų. Sprendžiame nelygybę $f'(x) > 0$:

$2xe^x + x^2 e^x > 0,$

$e^x\left(2x + x^2\right) > 0 \mid : e^x \ (e^x \text{ visada } > 0),$

$2x + x^2 > 0,$

$x(x+2) > 0;$



$x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty).$

Atsakymas. Funkcijos reikšmės didėja, kai $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$; mažėja, kai $x \in (-2; 0)$.

6b. Nustatome $f(x) = \frac{x^3}{\ln x}$ apibrėžimo sritį:

$$\begin{cases} x > 0, \\ \ln x \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x \in (0; 1) \cup (1; +\infty).$$

Randame funkcijos išvestinę:

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{\ln x}\right)' = \frac{\left(x^3\right)' \cdot \ln x - x^3 \cdot (\ln x)'}{\ln^2 x} = \frac{3x^2 \cdot \ln x - x^3 \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{3x^2 \cdot \ln x - x^2}{\ln^2 x}.$$

Randame reikšmių didėjimo intervalus. Sprendžiame nelygybę $f'(x) > 0$:

$\frac{3x^2 \cdot \ln x - x^2}{\ln^2 x} > 0 \;\Big|\; \cdot \ln^2 x \quad (\ln^2 x \text{ visada} > 0, \text{ kai } x \neq 1),$

$3x^2 \cdot \ln x - x^2 > 0,$

$x^2(3\ln x - 1) > 0 \;\Big|\; : x^2 \quad (x^2 \text{ visada} > 0 \text{ kai } x \neq 0),$

$3\ln x - 1 > 0,$

$\ln x > \frac{1}{3},$

$\ln x > \ln e^{\frac{1}{3}}.$

Kadangi logaritmo pagrindas $e \approx 2{,}7 > 1$, tai nelygybė teisinga, kai

$x > e^{\frac{1}{3}}.$

Atsižvelgę į funkcijos apibrėžimo sritį nustatome, kad funkcijos reikšmės didėja intervale $(\sqrt[3]{e}; +\infty)$.



Dabar atsirenkame funkcijos reikšmių mažėjimo intervalus.

Atsakymas. Reikšmės didėja, kai $x \in \left(\sqrt[3]{e}; +\infty\right)$;
mažėja, kai $x \in (0; 1) \cup \left(1; \sqrt[3]{e}\right)$.

6c. Funkcija $f(x) = 2\sqrt[3]{x^2} - 3\sqrt[3]{x} - 3$ apibrėžta su visais x: $x \in (-\infty; +\infty)$.

$$f'(x) = \left(2x^{\frac{2}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}} - 3\right)' = 2 \cdot \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - 3 \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 0 = \frac{4}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}.$$

Ieškome reikšmių didėjimo intervalų — sprendžiame nelygybę:

$$\frac{4}{3\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} > 0,$$

$$\boxed{\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a}}$$

$$\frac{4 \cdot \sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x}} - \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}} > 0,$$

$$\frac{4\sqrt[3]{x} - 3}{3\sqrt[3]{x^2}} > 0 \;\Big|\; \cdot 3\sqrt[3]{x^2} > 0, \text{ kai } x \neq 0,$$

$$4\sqrt[3]{x} - 3 > 0,$$

$$\sqrt[3]{x} > \frac{3}{4} \;\Big|\; \uparrow 3,$$

$$x > \frac{27}{64}.$$

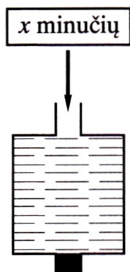
Vadinasi, funkcijos reikšmės didėja, kai $x \in \left(\frac{27}{64}; +\infty\right)$. Funkcijos $f(x)$ išvestinė taške $x = 0$ neegzistuoja (kritinis taškas). Išvestinė neigiama intervaluose $(-\infty; 0)$ ir $\left(0; \frac{27}{64}\right)$. Todėl funkcija yra mažėjanti tuose intervaluose. Bet $f(x)$ tolydi taške 0. Taigi tuos intervalus sujungiame: $\left(-\infty; \frac{27}{64}\right)$.

Atsakymas. Reikšmės didėja, kai $x \in \left(\frac{27}{64}; +\infty\right)$;
mažėja, kai $x \in \left(-\infty; \frac{27}{64}\right)$.

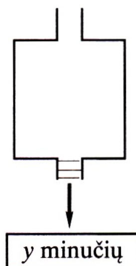
7. Tuo pačiu metu atsukus vandens čiaupą ir atidarius ištekamąjį vamzdį, indas pripildomas vandens per 36 minutes. Jei čiaupas ir ištekamasis vamzdis būtų atsukti 6 minutes, o tada ištekamasis vamzdis būtų uždarytas, tai tas indas prisipildytų per kitas 10 minučių. Per kiek minučių prisipildytų indas, jei čiaupas būtų atsuktas, o ištekamasis vamzdis uždarytas?

> Jei indas pripildomas per x valandų, tai per 1 valandą pripildoma $\frac{1}{x}$ indo dalis.
> Per t valandų pripildoma $t \cdot \frac{1}{x} = \frac{t}{x}$ indo. Per x valandų pripildomas visas indas $x \cdot \frac{1}{x} = 1$.
> (1 žymi visą dydį.)

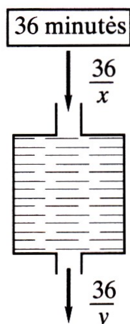
Laiką, kurį mums reikia rasti, pažymėkime x (minutėmis).



x — laikas (minutėmis), per kurį indas pripildomas vandens, kai atsuktas tik įtekamasis čiaupas.
$\frac{1}{x}$ — tokia indo dalis pripildoma per 1 minutę (įtekamuoju čiaupu).
y — laikas (minutėmis), per kurį iš pilnai pripildyto indo išbėga visas vanduo, kai atidarytas tik ištekamasis vamzdis.
$\frac{1}{y}$ — tokia indo dalis ištuštėja per minutę (kai atidarytas tik ištekamasis vamzdis).



1) Kadangi abu vamzdžiai buvo atsukti 36 minutes, tai per tą laiką:

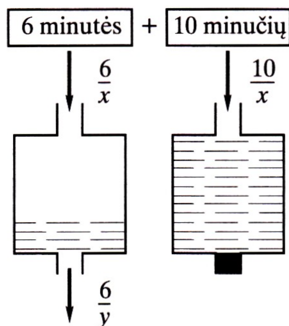


- į indą buvo įpilta $36 \cdot \frac{1}{x} = \frac{36}{x}$ vandens,
- iš jo ištekėjo $36 \cdot \frac{1}{y} = \frac{36}{y}$ vandens.

Per tą laiką indas tapo sklidinas. Vadinasi,

$$\boxed{\frac{36}{x} - \frac{36}{y} = 1}$$

2) Lygtimi užrašykime antrąjį sąlygos sakinį.



$\frac{6}{x} - \frac{6}{y} + \frac{10}{x} = 1.$

Per pirmąsias 6 minutes:

- į indą buvo įpilta $6 \cdot \frac{1}{x} = \frac{6}{x}$ vandens,
- ištekėjo $6 \cdot \frac{1}{y} = \frac{6}{y}$ vandens,
- inde liko $\left(\frac{6}{x} - \frac{6}{y}\right)$ vandens.

Per likusias 10 minučių į indą dar buvo įpilta $10 \cdot \frac{1}{x} = \frac{10}{x}$. Kadangi per tas 16 minučių indas prisipildė, tai

$$\frac{6}{x} - \frac{6}{y} + \frac{10}{x} = 1, \quad \boxed{\frac{16}{x} - \frac{6}{y} = 1}$$

3) Randame x ir y reikšmes, su kuriomis abi stačiakampiuose įrėmintos lygtys virsta teisingomis lygybėmis — sprendžiame sistemą:

$$\begin{cases} \frac{36}{x} - \frac{36}{y} = 1, \\ \frac{16}{x} - \frac{6}{y} = 1 \mid \cdot 6; \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{36}{x} - \frac{36}{y} = 1, \\ \frac{96}{x} - \frac{36}{y} = 6. \end{cases}$$

Iš antrosios lygties atimkime pirmąją:

$$\frac{60}{x} = 5, \quad 5x = 60, \quad x = 12.$$

Toliau sistemą spręsti nėra reikalo, nes jau radome, ko prašo uždavinys.
Pastaba. Šiaip jau tekstiniai uždaviniai tikrinami iki galo — viską suradus reikia įsitikinti, kad teisingas kiekvienas sąlygos sakinys.

Atsakymas. Per 12 minučių.

Funkcijų išvestinių taikymai

1. Ištyrę funkciją $f(x)$, nubraižykite jos grafiko eskizą.

a) $f(x) = x^4 - 2x^2$;

b) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$;

c) $f(x) = x^2 e^{-x}$.

2. Raskite funkcijos $f(x)$ didžiausią ir mažiausią reikšmę intervale.

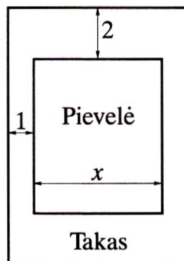
a) $f(x) = x^2 - 8x + 7$, $x \in [-1; 7]$;

b) $f(x) = x^2 \ln x$, $x \in [1; e]$;

c) $f(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) - \sin x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. a) Skaičių 12 išskaidykite į du neneigiamus dėmenis taip, kad jų kvadratų suma būtų mažiausia.

b) Ūkininkas savo sklype nori įsirengti stačiakampio formos kiemelį, kurio viduryje būtų 72 m^2 ploto stačiakampė dekoratyvinė pievelė, o apie ją — akmenimis grįstas takelis. Išilgai vienos poros priešingų pievelės kraštų to tako plotis bus 2 m, o išilgai kitos poros — 1 m.



1) Pievelės krašto ilgį prie 2 m pločio tako pažymėkite x. Parodykite, kad kiemelio plotas yra $S(x) = 4x + \frac{144}{x} + 80$ (m^2).

2) Nustatykite, su kuria x reikšme kiemelio plotas bus mažiausias, kai $x \in [3; 8]$.

c) Iš skritulio formos plokštelės, kurios spindulio ilgis yra 10 cm, reikia išpjauti statųjį trikampį. Kokio ilgio turi būti trikampio kraštinės, kad jo plotas būtų didžiausias?

4. Raskite funkcijos $f(x) = x^2 - x^4$, apibrėžtos intervale $[-1; 4]$, reikšmių sritį.

5. Duota funkcija $f(x) = |4x - 1|$.

1) Nubraižykite $y = f(x)$ grafiką.

2) Nustatykite funkcijos grafiko taško, esančio arčiausiai taško $A(2; 0)$, koordinates.

1. Ištyrę funkciją $f(x)$, nubraižykite jos grafiko eskizą.

a) $f(x) = x^4 + 2x^3$;

b) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3}$;

c) $f(x) = (x-2)e^x$.

2. Raskite funkcijos $f(x)$ didžiausią ir mažiausią reikšmę intervale.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$, $x \in [-1; 5]$;

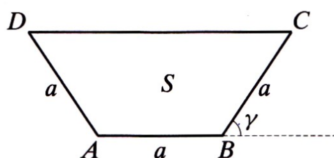
b) $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, $x \in [1; e]$;

c) $f(x) = \cos x - 0{,}5\cos(2x)$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. a) Skaičių 10 išskaidykite į du teigiamus dėmenis taip, kad jų sandauga būtų didžiausia.

b) Šalia gamyklos sienos planuojama įrengti stačiakampę automobilių aikštelę. Aikštelę reikia aptverti tvora. Kokie turi būti aikštelės matmenys, kad jos plotas būtų didžiausias, o tvoros ilgis būtų 80 m?

c) Planuojama iškasti melioracijos kanalą, kurio skerspjūvis būtų lygiašonės trapecijos formos. Trumpesnysis kanalo pagrindas ir šoninės kraštinės turi būti to paties ilgio a.
1) Įrodykite, kad kanalo skerspjūvio ploto S priklausomybė nuo kanalo šoninės sienos posvyrio kampo γ (žr. pav.) yra tokia:
$S(\gamma) = a^2 \sin\gamma \cdot (1 + \cos\gamma)$.



2) Koks turi būti šoninės kanalo sienos posvyrio kampas γ, $\gamma \in [10°; 80°]$, kad kanalo skerspjūvio plotas būtų didžiausias?

4. Nustatykite funkcijos $f(x) = 5 - 12x - 2x^2$, apibrėžtos intervale $[-4; 1]$, reikšmių sritį.

5. Duota funkcija $f(x) = |3x - 2|$.
1) Nubraižykite šios funkcijos grafiką.
2) Kuris funkcijos grafiko taškas yra arčiausiai taško $A(3; 0)$?

Funkcijų išvestinių taikymai

1. Ištyrę funkciją $f(x)$, nubraižykite jos grafiko eskizą.
a) $f(x) = x^4 - 2x^2$; b) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$; c) $f(x) = x^2 e^{-x}$.

> Braižant nestandartinės funkcijos grafiką, pirmiausia reikia algebriškai ištirti funkcijos savybes. Kuo daugiau funkcijos savybių pavyksta nustatyti, tuo lengviau nubraižyti tikslesnį grafiko eskizą.
> Algebriškai tiriant funkcijos $f(x)$ savybes (turint tikslą nubraižyti funkcijos grafiką) patogu vadovautis tokiu planu:
> 1) Nustatome funkcijos apibrėžimo sritį (žymima $D(f)$), t. y. randame tas x reikšmes, su kuriomis reiškinys $f(x)$ turi prasmę.
> 2) Išsiaiškiname, ar funkcija turi savybių, palengvinančių jos tyrimą (bei grafiko braižymą), t. y. nustatome:
>   - ar funkcija yra lyginė, ar yra nelyginė, ar nėra nei lyginė, nei nelyginė;
>   - ar funkcija yra periodinė.
> 3) Randame tas x reikšmes, su kuriomis funkcijos reikšmės:
>   - yra teigiamos (grafikas yra virš Ox ašies);
>   - yra neigiamos (grafikas yra žemiau Ox ašies);
>   - lygios 0 (grafikas kerta Ox ašį).
> 4) Nustatome x reikšmių intervalus, kuriuose funkcijos reikšmės:
>   - didėja (grafikas kyla į viršų);
>   - mažėja (grafikas leidžiasi žemyn);
>   - nei didėja, nei mažėja (grafikas yra lygiagretus Ox ašiai).
> 5) Randame funkcijos ekstremumo taškus (minimumo ir maksimumo taškus) bei ekstremumus — funkcijos reikšmes ekstremumų taškuose.
> 6) Nustatome funkcijos reikšmių sritį (žymima $E(f)$), t. y. randame reikšmes $y = f(x)$, kurias gali įgyti funkcija. Randame tašką, kuriame grafikas kerta Oy ašį: $(0; f(0))$.
>
> Pateiktasis funkcijos savybių tyrimo planas yra tik apytikslis. Nėra būtina savybes tirti nurodyta tvarka, ne visada kai kurias nurodytas savybes pavyksta ištirti ir pan. Todėl kai kuriuos iš plane nurodytų etapų tenka praleisti.

1a. $f(x) = x^4 - 2x^2$.

1) Kadangi reiškinys $x^4 - 2x^2$ turi prasmę su visomis x reikšmėmis, tai funkcijos apibrėžimo sritis yra visa realiųjų skaičių aibė: $D(f)$: $x \in (-\infty; +\infty)$.
2) Pažiūrėjus į funkcijos formulę $x^4 - 2x^2$ kyla mintis, kad funkcija gali būti lyginė (nes $x^4 = (-x)^4$, $x^2 = (-x)^2$).

> Funkcija $f(x)$ vadinama lygine, jei su kiekvienu x teisinga lygybė $f(x) = f(-x)$.
> Lyginės funkcijos grafikas yra simetriškas Oy ašies atžvilgiu.

Tikriname, ar teisinga lygybė $f(-x) = f(x)$. Randame $f(-x)$:

$$f(-x) = (-x)^4 - 2 \cdot (-x)^2 = x^4 - 2x^2.$$

Vadinasi, lygybė $f(-x) = f(x)$ yra teisinga — funkcija yra lyginė, o jos grafikas yra simetriškas Oy ašies atžvilgiu.

Remdamiesi šia savybe toliau galima tirti funkciją tik intervale $[0; +\infty)$.
(Kad funkcija neperiodinė, galime būti tikri jau vien todėl, kad ji lygi $x^2(x^2-2)$ ir yra didėjanti, kai $x > \sqrt{2}$.)
3) Nustatykime x reikšmes, su kuriomis:

$$f(x) > 0, \quad f(x) < 0, \quad f(x) = 0.$$

Pirmiausia spręskime lygtį $f(x) = 0$:

$x^4 - 2x^2 = 0$ — rasime tas x reikšmes, kur grafikas kerta Ox ašį;

$$x^2(x^2 - 2) = 0,$$

$$x^2 = 0, \quad \text{arba} \quad x^2 - 2 = 0, \quad x^2 = 2;$$

$$x_1 = 0; \qquad x_2 = -\sqrt{2}, \ x_3 = \sqrt{2}.$$

(Ir iš šito aišku, kad funkcija neperiodinė — jeigu periodinė funkcija kerta Ox ašį, tai kerta be galo daug kartų.)
Nustatome, kokias reikšmes (teigiamas ar neigiamas) funkcija įgyja intervaluose $(-\infty; -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}; 0)$, $(0; \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}; +\infty)$. Kitaip sakant, randame x reikšmes, su kuriomis $f(x) > 0$, ir su kuriomis $f(x) < 0$. Vadinasi, galima spręsti nelygybę

$$x^4 - 2x^2 > (<)\, 0.$$

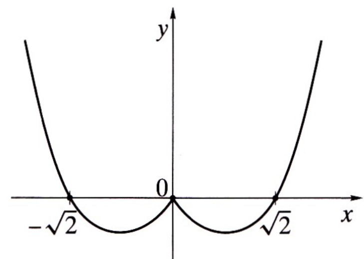
Bet galima remtis ir tuo, kad kiekviename iš rastų intervalų funkcijos reikšmių ženklai nesikeičia — funkcijos reikšmės yra arba teigiamos, arba neigiamos.
Imkime intervalo $(0; \sqrt{2})$ kokį nors skaičių, pavyzdžiui, $x = 1$ ir apskaičiuokime funkcijos reikšmę šiame taške:

$$f(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^2 = 1 - 2 = -1 < 0.$$

Funkcijos reikšmė šiame taške yra neigiama, — o tai reiškia, kad su visais intervalo $(0; \sqrt{2})$ skaičiais funkcijos reikšmės neigiamos. Savo ruožtu tai reiškia, kad kai $x \in (0; \sqrt{2})$, funkcijos grafikas yra žemiau Ox ašies. Analogiškai — intervale $(-\sqrt{2}; 0)$ turėsime tą pačią situaciją (nepamirškime — funkcija lyginė).
Imkime intervalo $(\sqrt{2}; +\infty)$ kokį nors „patogų" skaičių, pvz., $x = 2$ ir apskaičiuokime funkcijos reikšmę šiame taške:

$$f(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^2 = 2^4 - 2^3 = 8 \quad (>0).$$

Vadinasi, šiame intervale (o taip pat jam simetriškame intervale $(-\infty; -\sqrt{2})$) funkcijos reikšmės yra teigiamos, o grafikas yra virš Ox ašies.
Remdamiesi tuo, ką sužinojome apie funkciją, jau galime nubraižyti šiokį tokį grafiko eskizą.



Tirkime savybes toliau.
4) Raskime funkcijos reikšmių didėjimo intervalus (intervalus, kuriuose grafikas einant iš kairės į dešinę kyla aukštyn).

Randame funkcijos išvestinę:

$$f'(x) = \left(x^4 - 2x^2\right)' = 4x^3 - 4x.$$

Ieškant funkcijos reikšmių didėjimo intervalų tektų spręsti nelygybę

$$4x^3 - 4x > 0,$$

o ieškant reikšmių mažėjimo intervalų — nelygybę

$$4x^3 - 4x < 0.$$

Bet verta pradėti sprendžiant lygtį:

$4x^3 - 4x = 0$ — rasime ekstremumo taškus,

$4x\left(x^2 - 1\right) = 0,$

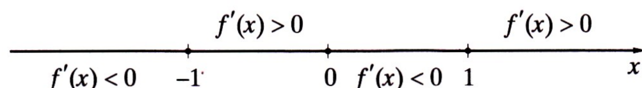
$4x = 0, \quad x^2 - 1 = 0, \quad (x-1)(x+1) = 0,$

$x_1 = 0; \quad x_2 = 1, x_3 = -1.$

Grįžkime prie nelygybės:

$4x^3 - 4x > 0,$

$x(x-1)(x+1) > 0.$



Nelygybės ženklus intervaluose $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$ nustatyti nesunku. Pavyzdžiui, paėmę $x = 10 \in (1; +\infty)$ matome:

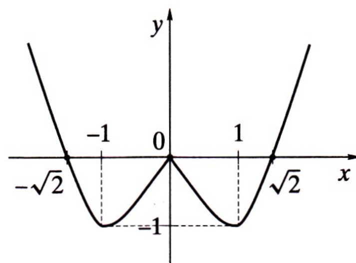
$$f'(10) = 4 \cdot 10 \cdot (10 - 1) \cdot (10 + 1) > 0.$$

Vadinasi, intervale $(1; +\infty)$ funkcijos reikšmės didėja. Tai aišku ir iš funkcijos grafiko eskizo, kurį jau nusibraižėme 3) punkte.
Dabar galime brėžinį patikslinti.

Pravartu apskaičiuoti:

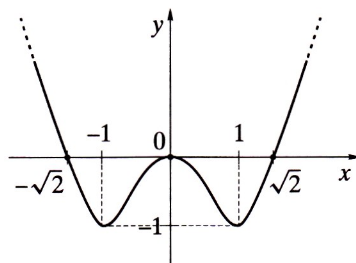
$f(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^2 = -1,$

$f(-1) = -1.$



Iš tikrųjų 4) punkte mes nustatėme štai ką:
- taškai $x = 1$ ir $x = -1$ yra minimumo taškai;
- taškas $x = 0$ yra maksimumo taškas.

Faktas, kad taškuose $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ funkcijos išvestinė lygi 0 mums reiškia ne tik tai, kad tie taškai yra ekstremumo, bet ir tai, kad grafikas šiuose taškuose yra „apvalus“, o ne „kampuotas“. Jei taškuose $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ grafikas būtų „aštrių kampų“, tai išvestinė šiuose taškuose neegzistuotų. Dar kartą patiksliname brėžinį.



Matome, kad 4) punkte atlikome ir 5) punktą.
Dar verta pamąstyti apie funkcijos reikšmių sritį. Beveik iš karto akivaizdu, kad funkcija įgyja reikšmes y iš intervalo $[-1; +\infty)$:

$$E(f)\colon\ y \in [-1; +\infty).$$

1b. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$.

1) Reiškinys $\frac{x-1}{x^2+3}$ apibrėžtas su visais x, nes vardiklis $x^2 + 3 \neq 0$ (juk x^2 visada $\geqslant 0$).
Čia verta pastebėti (pravers vėliau), kad $x^2 + 3 > 0$ su visais x.
2) Tikriname, ar funkcija yra lyginė ($f(-x) = f(x)$), ar yra nelyginė ($f(-x) = -f(x)$), ar nėra nei lyginė, nei nelyginė.
Randame $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{-x-1}{(-x)^2+3} = \frac{-x-1}{x^2+3}.$$

Akivaizdu, kad $f(-x) \neq f(x)$ (pavyzdžiui, $f(-1) = -\frac{1}{2}$, $f(1) = 0$).
Taip pat $f(-x) \neq -f(x)$, nes

$$-f(x) = -\frac{x-1}{x^2+3} = \frac{-x+1}{x^2+3}.$$

Taigi, funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.
3) Spręsime lygtį

$$\frac{x-1}{x^2+3} = 0 \text{ — rasime } x \text{ reikšmes, kur grafikas kerta } Ox \text{ ašį.}$$

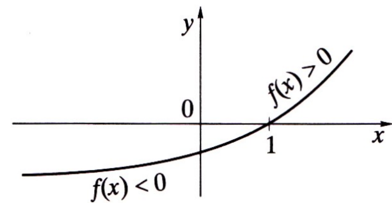
Kadangi $x^2 + 3 > 0$, tai lygybė teisinga, kai $x - 1 = 0$, $x = 1$.
Nustatome funkcijos reikšmių ženklus intervaluose $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$.

Akivaizdu, kad kai $x > 1$, tai

$$\frac{x-1}{x^2+3} > 0,$$

o kai $x < 1$, tai

$$\frac{x-1}{x^2+3} < 0.$$



4,5) Randame $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(\frac{x-1}{x^2+3}\right)' = \frac{(x-1)' \cdot (x^2+3) - (x^2+3)' \cdot (x-1)}{(x^2+3)^2} =$$

$$= \frac{x^2+3-2x(x-1)}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}.$$

Vardiklio neskubame kelti kvadratu, nes tokia jo išraiška mums leidžia iš karto teigti, kad $(x^2+3)^2 > 0$ su visais x.

Vadinasi, išvestinės ženklas, t. y. trupmenos $\frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}$ ženklas priklauso tik nuo skaitiklio $-x^2+2x+3$ ženklo:

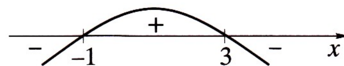
- kai $-x^2+2x+3>0$, tai $f'(x)>0$,
- kai $-x^2+2x+3<0$, tai $f'(x)<0$,
- kai $-x^2+2x+3=0$, tai $f'(x)=0$.

Spręskime lygtį:

$$-x^2+2x+3=0 \text{ — rasime ekstremumo taškus.}$$

$$D=4-4\cdot(-1)\cdot 3=16, \quad x_1=\frac{-2-4}{2\cdot(-1)}=3, \quad x_2=-1.$$

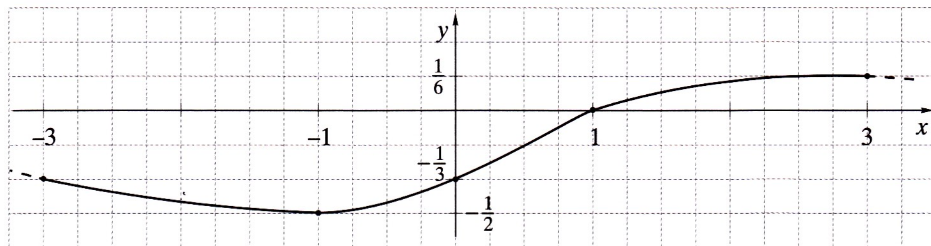
Nustatome trinario $-x^2+2x+3=-(x-3)(x+1)$ ženklus intervaluose $(-\infty;-1)$, $(-1;3)$, $(3;+\infty)$.



Vadinasi:

- funkcijos reikšmės didėja, kai $x\in(-1;3)$;
- funkcijos reikšmės mažėja, kai $x\in(-\infty;-1)$ ir kai $x\in(3;+\infty)$;
- $x=-1$ yra minimumo taškas; $f(-1)=\frac{-1-1}{(-1)^2+3}=-\frac{1}{2}$;
- $x=3$ yra maksimumo taškas; $f(3)=\frac{3-1}{3^2+3}=\frac{1}{6}$.

Braižome grafiko eskizą, prieš tai radę, kur jis kerta Oy ašį:
kai $x=0$, tai $y=\frac{0-1}{0^2+3}=-\frac{1}{3}$.



Ką dar galime pastebėti? Funkcijos reikšmių sritis $y\in\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{6}\right]$. Kad būtų lengviau braižyti eskizą, mastelį (bent ant Oy ašies) reikia imti stambų (mes 1 skyrėme 6 langelius). Bet ir toks mastelis nelabai gelbsti — sunku tą eskizą išvingiuoti. Čia dar pravartu būtų paskaičiuoti poros grafiko taškų koordinates.

$$f(-2)=\frac{-2-1}{(-2)^2+3}=-\frac{3}{7}; \quad f(-3)=\frac{-3-1}{(-3)^2+3}=-\frac{1}{3}.$$

1c. $f(x)=x^2e^{-x}$.

1) $D(f)=(-\infty;+\infty)$.
Kadangi e^{-x} su visais x yra teigiamas, x^2 su visais x neneigiamas, tai

$$x^2\cdot e^{-x}\geqslant 0.$$

Bet $f(0)=0$; kai $x\to-\infty$, tai $f(x)\to+\infty$, $f(x)$ — tolydi. Vadinasi,

$$E(f)\in[0;+\infty).$$

2) $f(-x) = (-x)^2 \cdot e^{-(-x)} = x^2e^x$. Taigi $f(-x) \neq f(x)$ ir $f(-x) \neq -f(x)$, o tai reiškia, kad funkcija nėra nei lyginė, nei nelyginė.
3) Jau pirmame punkte nustatėme, kad $f(x) > 0$ su visais $x \neq 0$ ir $f(0) = 0$.
4) Raskime funkcijos išvestinę.

$$f'(x) = \left(x^2 \cdot e^{-x}\right)' = \left(x^2\right)' \cdot e^{-x} + x^2 \cdot \left(e^{-x}\right)' = 2xe^{-x} + x^2 \cdot e^{-x} \cdot (-x)' =$$
$$= 2xe^{-x} - x^2e^{-x}.$$

Ekstremumo taškai yra tos x reikšmės, su kuriomis $f'(x) = 0$:

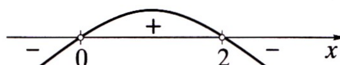
$$2xe^{-x} - x^2e^{-x} = 0,$$
$$e^{-x}x(2-x) = 0,$$
$$x_1 = 0, \quad x_2 = 2.$$

Apskaičiuojame ekstremumus — funkcijos reikšmes ekstremumų taškuose:

$$f(0) = 0^2 \cdot e^{-0} = 0, \quad f(2) = 2^2 \cdot e^{-2} = \frac{4}{e^2} \approx \frac{4}{2{,}7^2} \approx 0{,}55.$$

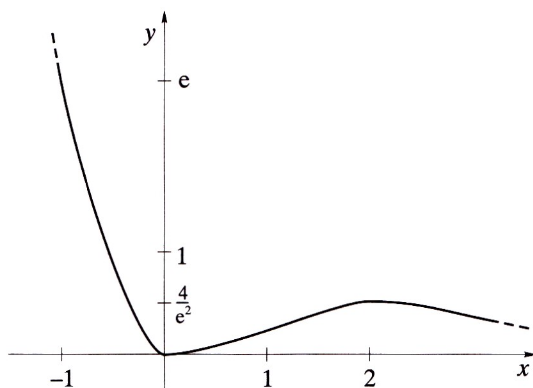
Funkcijos reikšmės didėja, kai $f'(x) > 0$:

$$e^{-x}x(2-x) > 0, \quad x(2-x) > 0,$$
$$x \in (0; 2).$$



Kai $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$, tai $f'(x) < 0$, — $f(x)$ reikšmės mažėja.
5) Remdamiesi 4) punktu matome, kad:
- $x = 0$ — minimumo taškas $f(0) = 0$;
- $x = 2$ — maksimumo taškas $f(2) \approx 0{,}55$.

Būtina apskaičiuoti kokio nors taško, priklausančio intervalui $x \in (-\infty; 0)$ koordinates. Pavyzdžiui, $f(-1) = e$.



Eskizą vėl braižome glodų („ne kampuotą“).

2. Raskite funkcijos $f(x)$ didžiausią ir mažiausią reikšmę intervale.
a) $f(x) = x^2 - 8x + 7$, $x \in [-1; 7]$;
b) $f(x) = x^2 \ln x$, $x \in [1; e]$;
c) $f(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) - \sin x$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Tolydi funkcija uždarame intervale didžiausią (arba mažiausią) reikšmę įgyja arba ekstremumo taške, arba intervalo pradžios ar galo taške.

2a. $f(x) = x^2 - 8x + 7$, $x \in [-1; 7]$.

Raskime ekstremumų taškus.

$$f'(x) = \left(x^2 - 8x + 7\right)' = 2x - 8,$$
$$2x - 8 = 0, \quad x = 4.$$

Patikriname, ar funkcijos ekstremumo taškas $x = 4$ yra intervalo $[-1; 7]$ skaičius, — juk ieškome didžiausios ir mažiausios reikšmės, kurią įgyja funkcija būtent šiame intervale:

$$4 \in [-1; 7].$$

Vadinasi, šiame intervale didžiausią ir mažiausią reikšmes funkcija $f(x) = x^2 - 8x + 7$ gali įgyti tik taškuose

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 7.$$

Apskaičiuojame funkcijos reikšmes šiuose taškuose:

$$f(-1) = (-1)^2 - 8 \cdot (-1) + 7 = 1 + 8 + 7 = 16;$$
$$f(4) = 4^2 - 8 \cdot 4 + 7 = -9;$$
$$f(7) = 7^2 - 8 \cdot 7 + 7 = 0.$$

Didžiausia iš reikšmių 16, −9, 0 yra reikšmė 16, mažiausia yra reikšmė −9.
Vadinasi,

$$\max_{[-1;7]} \left(x^2 - 8x + 7\right) = 16, \quad \min_{[-1;7]} \left(x^2 - 8x + 7\right) = -9.$$

Pastaba. Čia buvo galima remtis ir parabolės $y = x^2 - 8x + 7$ grafiku intervale $x \in [-1; 7]$, bet tai nelabai patogu. Galima remtis ir išraiška $f(x) = (x - 4)^2 - 9$.

Atsakymas. Didžiausia reikšmė yra 16,
mažiausia reikšmė yra −9.

2b. $f(x) = x^2 \cdot \ln x$, $x \in [1; e]$.

$$f'(x) = \left(x^2\right)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x;$$
$$2x \ln x + x = 0,$$
$$x(2 \ln x + 1) = 0,$$
$$x_1 = 0; \quad 2 \ln x + 1 = 0, \quad \ln x = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = e^{-\frac{1}{2}}.$$

Taškas:
$x = 0$ nepriklauso intervalui $[1; e]$ ir iš viso nepriklauso $f(x)$ apibrėžimo sričiai;
$x = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} < 1 \notin [1; e]$.
Vadinasi, abu funkcijos ekstremumo taškai nepriklauso intervalui $[1; e]$. Todėl didžiausios ir mažiausios reikšmės ieškosime tik duotojo intervalo galuose:

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 1^2 \cdot \ln 1 = 1 \cdot 0 = 0, \\ f(e) = e^2 \cdot \ln e = e^2 \cdot 1 = e^2 \end{array}\right. \Rightarrow f(1) < f(e).$$

Atsakymas. $\min_{[1;e]} \left(x^2 \ln x\right) = 0$, $\max_{[1;e]} \left(x^2 \ln x\right) = e^2$.

2c. $f(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) - \sin x,\ x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$

$$f'(x) = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]' - (\sin x)' = -\frac{1}{2}\cdot\bigl(-\sin(2x)\bigr)\cdot(2x)' - \cos x = \sin(2x) - \cos x.$$

Sprendžiame lygtį:

$$\sin(2x) - \cos x = 0,$$

$$\boxed{\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$2\sin x\cos x - \cos x = 0,$$

$$\cos x(2\sin x - 1) = 0,$$

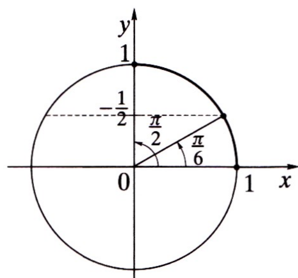
$$\cos x = 0;\qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z};$$

$$2\sin x - 1 = 0,\qquad \sin x = \frac{1}{2},\qquad x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z},\qquad x = (-1)^k\cdot\frac{\pi}{6} + \pi k.$$

Tarp rastųjų x reikšmių:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \boldsymbol{Z},\quad x = (-1)^k\cdot\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \boldsymbol{Z},$$

ieškome tų, kurios patenka į intervalą $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.



Akivaizdu, kad tik $\frac{\pi}{2}$ (kai $n = 0$) ir $\frac{\pi}{6}$ (kai $k = 0$) priklauso šiam intervalui.

Skaičiuokime funkcijos reikšmes, kai $x = 0$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$:

$$f(0) = -\frac{1}{2}\cos(2\cdot 0) - \sin 0 = -\frac{1}{2}\cdot 1 - 0 = -\frac{1}{2};$$

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right) - \sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6} =$$
$$= -\frac{1}{2}\cos 60^\circ - \sin 30^\circ = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{3}{4};$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \sin\frac{\pi}{2} = -\frac{1}{2}\cos\pi - \sin\frac{\pi}{2} =$$
$$= -\frac{1}{2}\cos 180^\circ - \sin 90^\circ = -\frac{1}{2}\cdot(-1) - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2};$$

$$f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) > f\left(\frac{\pi}{6}\right).$$

Vadinasi, $-\frac{1}{2}$ maksimumas; $-\frac{3}{4}$ minimumas.

Atsakymas. $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]}\left(-\frac{1}{2}\cos(2x) - \sin x\right) = -\frac{3}{4};\ \max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]}\left(-\frac{1}{2}\cos(2x) - \sin x\right) = -\frac{1}{2}.$

3a. Skaičių 12 išskaidykite į du neneigiamus dėmenis taip, kad jų kvadratų suma būtų mažiausia.

Vieną dėmenį pažymėkime x, tada kitas dėmuo $(12 - x)$. Dėmenų kvadratai:

$$x^2, \quad (12 - x)^2 = 144 - 24x + x^2.$$

Tų kvadratų suma:

$$x^2 + (12 - x)^2 = x^2 + 144 - 24x + x^2 = 2x^2 - 24x + 144.$$

Reikia rasti x reikšmę, su kuria reiškinys $2x^2 - 24x + 144$ įgyja didžiausią reikšmę. Pastebėkime, kad $x \in [0; 12]$.
Taigi reikia rasti funkcijos

$$f(x) = 2x^2 - 24x + 144$$

mažiausią reikšmę, kai $x \in [0; 12]$.

$$f'(x) = \left(2x^2 - 24x + 144\right)' = 4x - 24;$$
$$4x - 24 = 0, \quad x = 6, \quad 6 \in [0; 12];$$
$$f(0) = 2 \cdot 0^2 - 24 \cdot 0 + 144 = 144,$$
$$f(6) = 2 \cdot 6^2 - 24 \cdot 6 + 144 = 72,$$
$$f(12) = 2 \cdot 12^2 - 24 \cdot 12 + 144 = 288 - 288 + 144 = 144.$$
$$f(6) < f(0) = f(12).$$

Reiškinys

$$2x^2 - 24x + 144$$

intervale $[0; 12]$ mažiausią reikšmę įgyja, kai $x = 6$.
Vadinasi, $x = 6$ — vienas dėmuo, $12 - 6 = 6$ — kitas dėmuo.

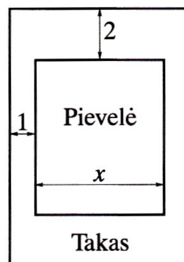
Atsakymas. $12 = 6 + 6$.

3b. Ūkininkas savo sklype nori įsirengti stačiakampio formos kiemelį, kurio viduryje būtų $72\,\mathrm{m}^2$ ploto stačiakampė dekoratyvinė pievelė, o apie ją — akmenimis grįstas takelis. Išilgai vienos poros priešingų pievelės kraštų to tako plotis bus 2 m, o išilgai kitos poros — 1 m.

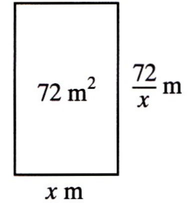
1) Pievelės krašto ilgį prie 2 m pločio tako pažymėkite x. Parodykite, kad kiemelio plotas yra

$$S(x) = 4x + \frac{144}{x} + 80\,(\mathrm{m}^2).$$

2) Nustatykite, su kuria x reikšme kiemelio plotas bus mažiausias, kai $x \in [3; 8]$.



3b1. Pievelės vieno krašto ilgį pažymėję x, tuo x galime išsireikšti kito krašto ilgį, nes žinome pievelės plotą (žr. pav.). Kiemelio kraštų ilgiai bus:



$$x + 1 + 1 = 2 + x; \quad \frac{72}{x} + 2 + 2 = 4 + \frac{72}{x}.$$

Kiemelio plotas $S(x)$:

$$(2 + x) \cdot \left(4 + \frac{72}{x}\right) = 8 + \frac{144}{x} + 4x + 72 = 4x + \frac{144}{x} + 80\,(\mathrm{m}^2).$$

3b2. Apskaičiuokime ploto reikšmes intervalo [3; 8] galuose:

$$S(3) = 4 \cdot 3 + \frac{144}{3} + 80 = 140\,(\mathrm{m}^2);$$

$$S(8) = 8 \cdot 3 + \frac{144}{8} + 80 = 122\,(\mathrm{m}^2).$$

Bet mažiausią reikšmę $S(x)$ gali įgyti ir vidiniame intervalo [3; 8] taške. Randame $S(x)$ išvestinę:

$$S'(x) = \left[4x + \frac{144}{x} + 80\right]' = 4 - \frac{144}{x^2}.$$

Išvestinė neapibrėžta, kai $x = 0$, bet $0 \notin [3; 8]$, ir iš viso $x = 0$ nepriklauso $S(x)$ apibrėžimo sričiai, todėl taškas 0 mūsų nedomina. Ekstremumų taškų ieškosime spręsdami lygtį:

$$4 - \frac{144}{x^2} = 0,$$

$$4x^2 - 144 = 0,$$

$$x^2 = 36,$$

$$x = 6, \quad 6 \in [3; 8];$$

$$x = -6 \notin [3; 8].$$

Skaičiuojame $S(6)$:

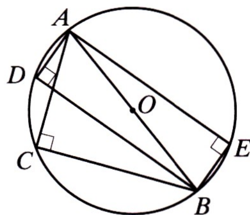
$$4 \cdot 6 + \frac{144}{6} + 80 = 128\,(\mathrm{m}^2).$$

Iš skaičių 140, 122 ir 128 mažiausias yra 122. Vadinasi, kiemelio plotas bus mažiausias, kai $x = 8$ m.

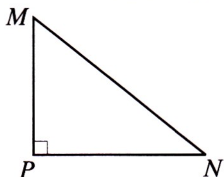
Atsakymas. $x = 8$.

3c. Iš skritulio formos plokštelės, kurios spindulio ilgis yra 10 cm, reikia išpjauti statųjį trikampį. Kokio ilgio turi būti trikampio kraštinės, kad jo plotas būtų didžiausias?

Įbrėžtinis kampas, kuris remiasi į apskritimo skersmenį, yra status.

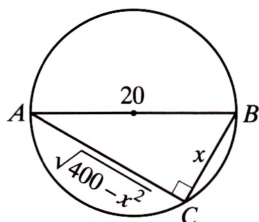


AB — apskritimo su centru O skersmuo:
$\angle ACB = 90°$, $\angle ADB = 90°$, $\angle AEB = 90°$;
$\triangle ACB$, $\triangle ADB$, $\triangle AEB$ — statūs trikampiai.



$\angle P = 90°$ — $\triangle MPN$ status,
MN — įžambinė,
MP, PN — statiniai,
$MP^2 + PN^2 = MN^2$,
$S_{\triangle MPN} = \frac{MP \cdot PN}{2}$.

Iš sąlygos aišku, kad išpjauto trikampio įžambinė yra apskritimo skersmuo — antraip trikampis nebus status.



Vieno statinio ilgį pažymėkime x.
$AB = 20$, $BC = x$, $AC = \sqrt{20^2 - x^2}$;
$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{400-x^2} \cdot x}{2} = S(x)$.

Randame $S(x)$ išvestinę:

$$\left(\frac{\sqrt{400-x^2} \cdot x}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(\left[(400-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]' \cdot x + x' \cdot \sqrt{400-x^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot \frac{(400-x^2)'}{\sqrt{400-x^2}} + \frac{\sqrt{400-x^2}}{2} =$$

$$= -\frac{x^2}{2\sqrt{400-x^2}} + \frac{\sqrt{400-x^2}}{2}.$$

Sprendžiame lygtį

$$-\frac{x^2}{2\sqrt{400-x^2}} + \frac{\sqrt{400-x^2}}{2} = 0 \mid \cdot 2\sqrt{400-x^2} \neq 0,$$

$$-x^2 + 400 - x^2 = 0,$$

$$-2x^2 + 400 = 0,$$

$$x^2 = 200, \quad x = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}.$$

Gautoji $x = 10\sqrt{2}$ reikšmė yra funkcijos $S(x) = \frac{\sqrt{400-x^2}\cdot x}{2}$ maksimumo taškas, nes $S'(x) = -\frac{x^2}{2\sqrt{400-x^2}} + \frac{\sqrt{400-x^2}}{2}$ intervale $x \in (0; 10\sqrt{2})$ yra teigiama, o intervale $x \in (10\sqrt{2}; 20)$ — neigiama.

Vadinasi, trikampio plotas bus didžiausias, kai vienas jo statinis bus lygus $\sqrt{200}$ cm.
Randame kito statinio ilgį:

$$\sqrt{400 - (\sqrt{200})^2} = \sqrt{400 - 200} = \sqrt{200}\,(\text{cm}) = 10\sqrt{2}\,(\text{cm}).$$

Taigi — trikampis lygiašonis.

Atsakymas. $10\sqrt{2}$ cm, $10\sqrt{2}$ cm, 20 cm.

Pastaba. Plotas $S(x)$ bus didžiausias, kai jo kvadratas $\frac{(400-x^2)\cdot x^2}{4}$ didžiausias, t. y. kai reiškinys $400x^2 - x^4$ didžiausias. Dabar išvestinė paprasta, bet jos ir nereikia: reiškinys $400x^2 - x^4 = -(x^2 - 200)^2 + 200^2$ didžiausias, kai $x^2 = 200$.

4. Raskite funkcijos $f(x) = x^2 - x^4$ reikšmių sritį, kai $x \in [-1; 4]$.

> Funkcijos $f(x)$ apibrėžimo sritis — tos x reikšmės, su kuriomis reiškinys $f(x)$ turi prasmę.
> Funkcijos $f(x)$ reikšmių sritis — visos reikšmės, kurias įgyja reiškinys $f(x)$.

Funkcija $f(x) = x^2 - x^4$ yra apibrėžta su visais x.
Mums reikia rasti reikšmes, kurias įgyja reiškinys $x^2 - x^4$, kai x kinta nuo -1 iki 4.
Funkcija $f(x)$ yra tolydi. Vadinasi, jos įgyjamas reikšmes intervale $[-1; 4]$ galime rasti samprotaudami taip:
1) randame mažiausią funkcijos reikšmę intervale $[-1; 4]$, t. y. $\min\limits_{[-1;4]} (x^2 - x^4)$;
2) randame didžiausią funkcijos reikšmę tame intervale, t. y. $\max\limits_{[-1;4]} (x^2 - x^4)$;
3) intervalas $\left[\min\limits_{[-1;4]} (x^2 - x^4); \max\limits_{[-1;4]} (x^2 - x^4)\right]$ ir bus funkcijos $f(x)$ reikšmių sritis tame intervale.

Randame $f(x)$ išvestinę:

$$f'(x) = (x^2 - x^4)' = 2x - 4x^3.$$

Randame ekstremumo taškus:

$$2x - 4x^3 = 0,$$
$$x(2 - 4x^2) = 0,$$
$$x_1 = 0; \quad 2 - 4x^2 = 0, \quad x^2 = \frac{1}{2},$$
$$x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$
$$0 \in [-1; 4], \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \in [-1; 4], \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \in [-1; 4].$$

Apskaičiuojame ekstremumus:

$$f(0) = 0^2 - 0^4 = 0;$$
$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4};$$
$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 = \frac{1}{4}.$$

Apskaičiuojame funkcijos reikšmes intervalo $[-1; 4]$ galuose:

$$f(-1) = (-1)^2 - (-1)^4 = 1 - 1 = 0;$$
$$f(4) = 4^2 - 4^4 = 16 - 256 = -240.$$

Iš surastų funkcijos reikšmių mažiausia yra -240, didžiausia yra $\frac{1}{4}$.

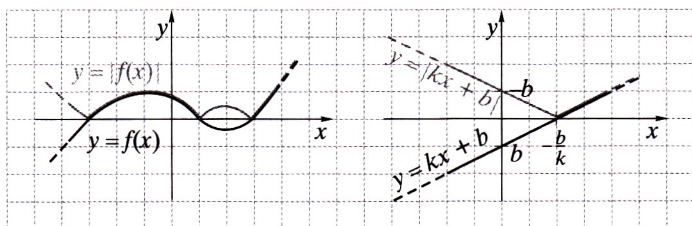
Atsakymas. $E(f) = \left[-240; \frac{1}{4}\right]$.

5. Duota funkcija $f(x) = |4x - 1|$.

1) Nubraižykite $y = f(x)$ grafiką.
2) Nustatykite funkcijos grafiko taško, esančio arčiausiai taško $A(2; 0)$, koordinates.

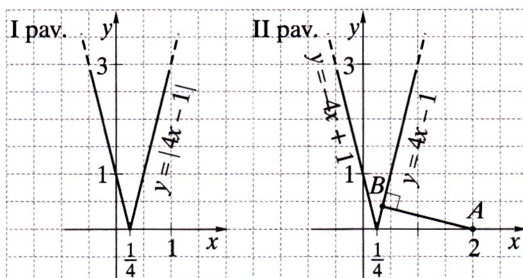
5.1.

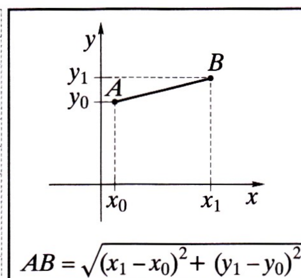
$$|a| = \left[\begin{array}{l} a, \text{ kai } a \geqslant 0, \\ -a, \text{ kai } a < 0. \end{array}\right.$$



$$|4x - 1| = \left[\begin{array}{l} 4x - 1, \text{ kai } 4x - 1 \geqslant 0, x \geqslant \frac{1}{4}; \\ -4x + 1, \text{ kai } 4x - 1 < 0, x < \frac{1}{4}. \end{array}\right.$$

Taigi intervale $x \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$ funkcijos $y = f(x)$ grafikas yra tiesė $y = -4x + 1$, o intervale $x \in \left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$ — tiesė $y = 4x - 1$ (žr. I pav.).





5.2. Iš II pav. aišku, kad ieškomasis taškas B yra:

- tiesėje $y = 4x - 1$;
- statmenyje (tiesėje) BA.

Kadangi B yra tiesėje $y = 4x - 1$, tai jo koordinates galima užrašyti taip:

$$B(x; 4x - 1). \qquad (1)$$

Raskime tiesės AB lygtį. Remkimės bendrąja tiesės lygtimi:

$$y = kx + b.$$

Žinome, kad AB eina per tašką $A(2; 0)$, todėl teisinga lygybė

$$0 = k \cdot 2 + b, \quad b = -2k.$$

Vadinasi, tiesės AB lygtis:

$$y = kx - 2k.$$

Koeficiento k reikšmę rasime remdamiesi tuo, kad tiesės $y = 4x - 1$ ir $y = kx - 2k$ yra statmenos.

Statmenų tiesių krypčių koeficientų sandauga lygi -1.

Vadinasi, teisinga lygybė

$$4 \cdot k = -1, \quad k = -\frac{1}{4}.$$

Taigi, tiesės AB lygtis yra

$$y = -\frac{1}{4}x - 2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right), \quad y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$$

Kadangi taškas B yra tiesėje $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$, tai jo koordinates galima užrašyti taip:

$$B\left(x; -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right). \qquad (2)$$

Sulyginę (1) ir (2) išraiškų ordinates gauname lygtį:

$$4x - 1 = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$$

Išsprendę lygtį randame taško B koordinatę x:

$$16x - 4 = -x + 2, \quad 17x = 6, \quad x = \frac{6}{17}.$$

Taško B koordinatė y:

$$4 \cdot \frac{6}{17} - 1 = \frac{24}{17} - 1 = \frac{7}{17}.$$

Atsakymas. $B\left(\frac{6}{17}; \frac{7}{17}\right)$.

Pirmykštės funkcijos ir neapibrėžtiniai integralai

K8 (8.1–8.2)

1. Raskite funkciją $f(x)$, kai duota jos pirmykštė funkcija $F(x)$.

a) $F(x) = 3\operatorname{ctg} x + x$;

b) $F(x) = 5 + x^8$;

c) $F(x) = \ln x^2 - e^x$.

2. Raskite visas funkcijos $f(x)$ pirmykštes funkcijas.

a) $f(x) = -7x + 4$;

b) $f(x) = x^{-5} + \frac{1}{x^2}$;

c) $f(x) = \frac{4}{5\sqrt[5]{x^4}}$;

d) $f(x) = \frac{1}{(3+2x)^4}$;

e) $f(x) = e^x + \frac{3}{8x-1}$;

f) $f(x) = 5 - \sin(7x)$.

3. Raskite funkcijos $f(x)$ pirmykštę funkciją, kurios grafikas eina per tašką M, kai:

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$, $M(4; 5)$;

b) $f(x) = 3^x \ln 3$, $M(2; 7)$;

c) $f(x) = e^{-2x}$, $M\left(\ln 3; \frac{4}{9}\right)$.

4. Apskaičiuokite neapibrėžtinį integralą.

a) $\int (2x^2 - 3x + 4)\,dx$;

b) $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx$;

c) $\int \frac{dx}{\cos^2(3x+1)}$.

5. Raskite funkcijos $f(x)$ pirmykštę funkciją $F(x)$, tenkinančią nurodytą sąlygą.

a) $f(x) = (2x - 7)^{21}$, $F(3) = 0$;

b) $f(x) = \frac{1}{\left(\frac{x}{2}+3\right)^3}$, $F(-4) = 3$;

c) $f(x) = \sin\frac{x}{3} \cdot \cos\frac{x}{3}$, $F(0) = \frac{1}{3}$.

6. a) Raskite funkcijos $f(x) = 5(x + 3)$ pirmykštę funkciją, kurios grafikas su abscisių ašimi turi vieną bendrą tašką.

b) Raskite funkcijos $f(x) = 4x$ pirmykštę funkciją, kurios grafikas liečia tiesę $y = 2x + 1$.

c) Raskite funkciją, kurios išvestinė lygi $2x - 3$, o funkcijos reikšmė taške $x = 2$ lygi 2.

1. Raskite funkciją $f(x)$, kai duota jos pirmykštė funkcija $F(x)$.

a) $F(x) = x^7 + 3$;

b) $F(x) = 2\operatorname{tg} x - x$;

c) $F(x) = \mathrm{e}^{2x} - \sqrt{x}$.

2. Raskite visas funkcijos $f(x)$ pirmykštes funkcijas.

a) $f(x) = 2x - 1$;

b) $f(x) = \frac{1}{x^3} + x^{-6}$;

c) $f(x) = \cos(8x) - 3$;

d) $f(x) = \frac{6}{(5x-7)^3}$;

e) $f(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$;

f) $f(x) = \frac{7}{9x-2} - \mathrm{e}^x$.

3. Raskite funkcijos $f(x)$ pirmykštę funkciją, kurios grafikas eina per tašką M, kai:

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-3x}}$, $M\left(0; \frac{2}{3}\right)$;

b) $f(x) = 2^x \ln 2$, $M(3; 9)$;

c) $f(x) = \mathrm{e}^{-3x}$, $M\left(\ln 2; \frac{5}{24}\right)$.

4. Apskaičiuokite neapibrėžtinį integralą.

a) $\int (5x^2 + 7x - 6)\,\mathrm{d}x$;

b) $\int \sqrt[5]{x^3}\,\mathrm{d}x$;

c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(5x-2)}$.

5. Raskite funkcijos $f(x)$ pirmykštę funkciją $F(x)$, tenkinančią nurodytą sąlygą.

a) $f(x) = \left(5 - \frac{1}{3}x\right)^4$, $F(9) = \frac{4}{5}$;

b) $f(x) = \sqrt{1 - 5x}$, $F(0) = \frac{1}{30}$;

c) $f(x) = \cos^2(2x) - \sin^2(2x)$, $F\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1$.

6. a) Raskite funkcijos $f(x) = 3(x - 2)$ pirmykštę funkciją, kurios grafikas su abscisių ašimi turi vieną bendrą tašką.

b) Raskite funkcijos $f(x) = 2x$ pirmykštę funkciją, kurios grafikas liečia tiesę $y = x + 2$.

c) Raskite funkciją, kurios išvestinė lygi $4x + 5$, o funkcijos reikšmė taške $x = -3$ lygi 6.

Pirmykštės funkcijos ir neapibrėžtiniai integralai

K8 (8.1–8.2)

1. Raskite funkciją $f(x)$, kai duota jos pirmykštė funkcija $F(x)$.

a) $F(x) = 3\operatorname{ctg} x + x$; b) $F(x) = 5 + x^8$; c) $F(x) = \ln x^2 - e^x$.

> Jeigu funkcijos $F(x)$ išvestinė yra $f(x)$, t. y. $F'(x) = f(x)$, tai $F(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija.

1a. $F'(x) = (3\operatorname{ctg} x + x)' = 3 \cdot (\operatorname{ctg} x)' + x' = -\frac{3}{\sin^2 x} + 1.$

1b. $F'(x) = \left(5 + x^8\right)' = 5' + \left(x^8\right)' = 0 + 8 \cdot x^{8-1} = 8x^7.$

1c.
$$F'(x) = \left(\ln x^2 - e^x\right)' = \left(\ln x^2\right)' - \left(e^x\right)' = \frac{1}{x^2} \cdot \left(x^2\right)' - e^x =$$
$$= \frac{1}{x^2} \cdot 2x - e^x = \frac{2}{x} - e^x.$$

Atsakymas. a) $f(x) = -\frac{3}{\sin^2 x} + 1$; b) $f(x) = 8x^7$; c) $f(x) = \frac{2}{x} - e^x$.

2. Raskite visas funkcijos $f(x)$ pirmykštes funkcijas.

a) $f(x) = -7x + 4$; b) $f(x) = x^{-5} + \frac{1}{x^2}$; c) $f(x) = \frac{4}{5\sqrt[5]{x^4}}$;

d) $f(x) = \frac{1}{(3+2x)^4}$; e) $f(x) = e^x + \frac{3}{8x-1}$; f) $f(x) = 5 - \sin(7x)$.

> Jeigu $F(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė funkcija, tai ir $F(x) + C$, kur C — bet koks skaičius, yra $f(x)$ pirmykštė funkcija.

$f(x) =$	k	x^n	$\frac{1}{x}$	a^x	e^x
$F(x) =$	$kx + C$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$e^x + C$
$f(x) =$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$
$F(x) =$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\operatorname{tg} x + C$	$-\operatorname{ctg} x + C$	$2\sqrt{x} + C$

k, n, a, C — skaičiai; $n \neq -1$, $a > 0$, $a \neq 1$.

2a. $f(x) = -7x + 4.$

$$F(x) = -7 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} + 4x + C = -\frac{7}{2}x^2 + 4x + C.$$

Pasitikriname:

$$F'(x) = \left(-\frac{7x^2}{2} + 4x + C\right)' = -\frac{7}{2} \cdot 2x + 4 \cdot 1 + 0 = -7x + 4 = f(x).$$

2b. $f(x) = x^{-5} + \frac{1}{x^2} = x^{-5} + x^{-2}.$

$$F(x) = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{4x^4} - \frac{1}{x} + C.$$

2c. $f(x) = \frac{4}{5\sqrt[5]{x^4}} = \frac{4}{5} \cdot x^{-\frac{4}{5}}$.

$$F(x) = \frac{4}{5} \cdot \frac{x^{-\frac{4}{5}+1}}{-\frac{4}{5}+1} + C = \frac{4}{5} \cdot \frac{x^{\frac{1}{5}}}{\frac{1}{5}} + C = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{1} \cdot \sqrt[5]{x} + C = 4\sqrt[5]{x} + C.$$

2d. $f(x) = \frac{1}{(3+2x)^4} = (3+2x)^{-4}$.

Jeigu funkcija $F(x)$ yra funkcijos $f(x)$ pirmykštė, tai funkcijos $f(ax+b)$ pirmykštė yra funkcija $\frac{1}{a} \cdot F(ax+b)$; čia a, b — skaičiai, $a \neq 0$.

Samprotauti galima taip:
1) laipsnio $(2x+3)^{-4}$ pagrindą $2x+3$ pakeiskime x-su ir raskime x^{-4} pirmykštę;
2) tada surastoje pirmykštėje grįžkime prie senojo pagrindo: x-są keiskime $2x+3$;
3) beliks gautąją funkciją padauginti iš $\frac{1}{2}$ ir pridėti C.
Raskime x^{-4} pirmykštę:

$$F(x) = \frac{x^{-4+1}}{-4+1} = \frac{x^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3 \cdot x^3}.$$

Raskime $F(2x+3)$:

$$F(2x+3) = -\frac{1}{3 \cdot (2x+3)^3}.$$

Vadinasi, $f(x) = (2x+3)^{-4}$ pirmykštė yra

$$\frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3 \cdot (2x+3)^3}\right) = -\frac{1}{6(2x+3)^3}.$$

Visas $f(x) = (2x+3)^{-4}$ pirmykštes gausime pridėję C.

Atsakymas. $F(x) = -\frac{1}{6(2x+3)^3} + C$.

2e. $f(x) = e^x + \frac{3}{8x-1}$.

e^x pirmykštė e^x.
Reiškinį $8x-1$ pakeiskime x ir raskime $\frac{3}{x}$ pirmykštę $F(x)$:

$$3 \cdot \ln|x|.$$

Randame $F(8x-1)$:

$$3\ln|8x-1|.$$

Vadinasi, $f(x)$ pirmykštė yra

$$e^x + \frac{1}{8} \cdot 3\ln|8x-1| + C.$$

2f. $f(x) = 5 - \sin(7x)$.

5 pirmykštė yra $5x$.
$\sin x$ pirmykštė yra $-\cos x$.
$\sin(7x)$ pirmykštė yra $-\frac{1}{7}\cos(7x)$.
Vadinasi, $f(x)$ pirmykštės yra

$$5x + \frac{1}{7}\cos(7x) + C.$$

Pasitikriname:

$$\left[5x + \frac{1}{7}\cos(7x) + C\right]' = 5 + \frac{1}{7}\cdot\big(-\sin(7x)\big)\cdot(7x)' + 0 =$$
$$= 5 - \frac{\sin(7x)}{7}\cdot 7 = 5 - \sin(7x) = f(x).$$

3a. Raskite funkcijos $f(x)$ pirmykštę funkciją, kurios grafikas eina per tašką M, kai: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$, $M(4; 5)$.

Randame $f(x)$ pirmykštes.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} = (2x+1)^{-\frac{1}{2}};$$
$$F(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{2x+1} + C.$$

Kadangi $y = F(x)$ grafikas eina per tašką, kurio $x = 4$, $y = 5$, tai turi būti teisinga lygybė

$$5 = \sqrt{2\cdot 4 + 1} + C.$$

Iš šios lygybės rasime C reikšmę:

$$C = 5 - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2.$$

Vadinasi, funkcija

$$F(x) = \sqrt{2x+1} + 2$$

yra funkcijos $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ pirmykštė, o jos grafikas eina per tašką $(4; 5)$.

3b. Raskite funkcijos $f(x)$ pirmykštę funkciją, kurios grafikas eina per tašką M, kai: $f(x) = 3^x \ln 3$, $M(2; 7)$.

$f(x)$ pirmykštės:

$$F(x) = \frac{3^x}{\ln 3}\cdot\ln 3 + C = 3^x + C.$$

Ieškome C, su kuriuo teisinga lygybė:

$$7 = 3^2 + C, \quad C = -2.$$

Funkcija $F(x) = 3^x - 2$ yra $f(x)$ pirmykštė, o jos grafikas eina per tašką $(2; 7)$.

3c. Raskite funkcijos $f(x)$ pirmykštę funkciją, kurios grafikas eina per tašką M, kai: $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$, $M\left(\ln 3; \frac{4}{9}\right)$.

$f(x)$ pirmykštės:

$$F(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + C.$$

Sprendžiame lygtį:

$$\frac{4}{9} = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\cdot\ln 3} + C,$$
$$C = \frac{4}{9} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\ln 3^{-2}},$$
$$C = \frac{4}{9} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\ln \frac{1}{9}},$$

$\boxed{a^{\log_a x} = x}$

$$C = \frac{4}{9} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9},$$
$$C = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}.$$

Ieškoma pirmykštė yra $F(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{2}$.

4. Apskaičiuokite neapibrėžtinį integralą.

a) $\int (2x^2 - 3x + 4)\,\mathrm{d}x$; b) $\int \sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{d}x$; c) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(3x+1)}$.

$\boxed{\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C;\ \text{čia } F(x) \text{ funkcijos } f(x) \text{ pirmykštė, } C \text{ — skaičius.}}$

4a. $\boxed{\int \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x}$

$$\int \left(2x^2 - 3x + 4\right)\mathrm{d}x = \int 2x^2\,\mathrm{d}x - \int 3x\,\mathrm{d}x + \int 4\,\mathrm{d}x =$$
$$= 2\cdot\frac{x^3}{3} - 3\cdot\frac{x^2}{2} + 4x + C = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + C.$$

4b. $$\int \sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{d}x = \int x^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} + C = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + C.$$

4c. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(3x+1)} = \int \frac{1}{\cos^2(3x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}(3x+1) + C.$$

5a. Raskite funkcijos $f(x)$ pirmykštę funkciją $F(x)$, tenkinančią nurodytą sąlygą:
$f(x) = (2x-7)^{21}$, $F(3) = 0$.

$$F(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-7)^{21+1}}{21+1} + C = \frac{(2x-7)^{22}}{44} + C;$$
$$F(3) = \frac{(2\cdot 3-7)^{22}}{44} + C = \frac{(-1)^{22}}{44} + C = \frac{1}{44} + C;$$
$$\frac{1}{44} + C = 0, \quad C = -\frac{1}{44}.$$

Ieškomoji $F(x)$ yra:

$$F(x) = \frac{(2x-7)^{22}}{44} - \frac{1}{44}.$$

5b. Raskite funkcijos $f(x)$ pirmykštę funkciją $F(x)$, tenkinančią nurodytą sąlygą:
$f(x) = \frac{1}{\left(\frac{x}{2}+3\right)^3}$, $F(-4) = 3$.

$$f(x) = \frac{1}{\left(\frac{x}{2}+3\right)^3} = \left(\frac{x}{2}+3\right)^{-3} = \left(\frac{1}{2}x+3\right)^{-3};$$
$$F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}x+3\right)^{-3+1}}{-3+1} + C =$$
$$= 2\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}x+3\right)^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2} + C;$$
$$F(-4) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\cdot(-4)+3\right)^2} + C = -\frac{1}{(-2+3)^2} + C = -\frac{1}{1^2} + C = -1 + C;$$
$$-1 + C = 3, \quad C = 4.$$

Ieškomoji

$$F(x) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2} + 4.$$

5c. Raskite funkcijos $f(x)$ pirmykštę funkciją $F(x)$, tenkinančią nurodytą sąlygą:
$f(x) = \sin\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}$, $F(0) = \frac{1}{3}$.

Kadangi rasti $f(x)\cdot g(x)$ pirmykštės nemokame (bendru atveju), tai reikia pertvarkyti sandaugą

$$\sin\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}.$$

$$\boxed{2\sin\alpha\cos\alpha = \sin(2\alpha)}$$

Pertvarkome:

$$\sin\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{3} = \frac{2\cdot\sin\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}}{2} = \frac{\sin\frac{2x}{3}}{2}.$$

Ieškome $f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{2}{3}x\right)$ pirmykštės:

$$F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} \cdot \left(-\cos\frac{2x}{3}\right) + C = -\frac{3}{4}\cos\frac{2x}{3} + C.$$

$$F(0) = -\frac{3}{4}\cos\frac{2 \cdot 0}{3} + C = -\frac{3}{4}\cos 0 + C = -\frac{3}{4} \cdot 1 + C = -\frac{3}{4} + C.$$

Sprendžiame lygtį:

$$-\frac{3}{4} + C = \frac{1}{3}, \quad C = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{4}{12} + \frac{9}{12} = \frac{13}{12}.$$

Ieškomoji pirmykštė:

$$F(x) = -\frac{3}{4}\cos\frac{2x}{3} + \frac{13}{12}.$$

Atsakymas. a) $F(x) = \frac{(2x-7)^{22}}{44} - \frac{1}{44}$; b) $F(x) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2} + 4$; c) $F(x) = -\frac{3}{4}\cos\frac{2x}{3} + \frac{13}{12}$.

6a. Raskite funkcijos $f(x) = 5(x + 3)$ pirmykštę funkciją, kurios grafikas su abscisių ašimi turi vieną bendrą tašką.

Randame

$$f(x) = 5(x + 3) = 5x + 15$$

pirmykštes:

$$F(x) = 5 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} + 15x + C = \frac{5}{2} \cdot x^2 + 15x + C.$$

Funkcijos

$$y = \frac{5}{2}x^2 + 15x + C, \quad C \text{ — skaičius},$$

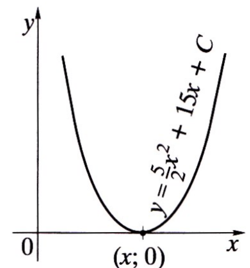
grafikas yra parabolė.

Reikia rasti tą C reikšmę, su kuria parabolė ir Ox ašis turės vienintelį bendrą tašką. Čia verta stabtelėti ir susivokti, kad jei parabolė ir Ox ašis turi vienintelį bendrą tašką, tai tas taškas yra parabolės viršūnė. Žinome, kad Ox ašies taškų y koordinatė lygi 0.

Ieškome tokio C, kad tiesė $y = 0$ (Ox ašis) ir parabolė $y = \frac{5}{2}x^2 + 15x + C$ turėtų vienintelį bendrą tašką. Vadinasi, reikia rasti C, su kuriuo lygtis

$$0 = \frac{5}{2}x^2 + 15x + C$$

turi vienintelį sprendinį.



Kvadratinė lygtis $\frac{5}{2}x^2 + 15x + C = 0$ turi vienintelį sprendinį, kai jos diskriminantas lygus 0. Randame D:

$$D = 15^2 - 4 \cdot \frac{5}{2} \cdot C = 225 - 10 \cdot C.$$

Randame tą C, su kuriuo $D = 0$:

$$225 - 10C = 0, \quad C = \frac{225}{10} = 22\frac{1}{2}.$$

Vadinasi, funkcija

$$F(x) = \frac{5}{2}x^2 + 15x + 22\frac{1}{2}$$

yra funkcijos

$$f(x) = 5x + 15$$

pirmykštė, o $F(x)$ grafikas su abscisių ašimi turi vienintelį bendrą tašką.

Atsakymas. $F(x) = \frac{5}{2}x^2 + 15x + 22\frac{1}{2}$.

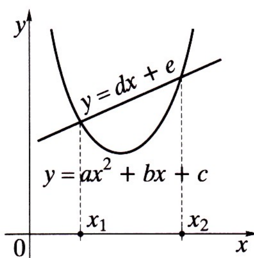
6b. Raskite funkcijos $f(x) = 4x$ pirmykštę funkciją, kurios grafikas liečia tiesę $y = 2x + 1$.

$f(x)$ pirmykštės:

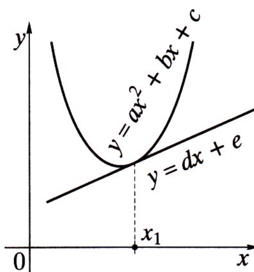
$$F(x) = 4 \cdot \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = 2x^2 + C.$$

$y = 2x^2 + C$ grafikas yra parabolė,
$y = 2x + 1$ grafikas yra tiesė.

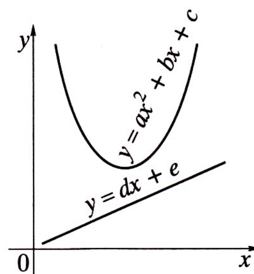
Tiesė su parabole gali:
- turėti du bendrus taškus — tiesė kerta parabolę;
- turėti vieną bendrą tašką — tiesė liečia parabolę;
- neturėti bendrų taškų.



Lygtis
$ax^2 + bx + c = dx + e$
turi du sprendinius: x_1, x_2.



Lygtis
$ax^2 + bx + c = dx + e$
turi vieną sprendinį: x_1.



Lygtis
$ax^2 + bx + c = dx + e$
sprendinių neturi.

Ieškome tos C reikšmės, su kuria lygtis

$$2x^2 + C = 2x + 1$$

turi vienintelį sprendinį:

$$2x^2 - 2x + C - 1 = 0,$$
$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (C - 1) = 4 - 8(C - 1) = 4 - 8C + 8 = -8C + 12.$$

Kvadratinė lygtis $2x^2 - 2x + C - 1 = 0$ turi vieną sprendinį, kai $D = 0$. Ieškome tos C, su kuria

$$-8C + 12 = 0; \quad -8C = -12, \quad C = \frac{3}{2}.$$

Atsakymas. $F(x) = 2x^2 + \frac{3}{2}$.

6c. Raskite funkciją, kurios išvestinė lygi $2x - 3$, o funkcijos reikšmė taške $x = 2$ lygi 2.

Ieškome $F(x)$, kurios išvestinė

$$F'(x) = 2x - 3.$$

Randame

$$\int (2x - 3)\,\mathrm{d}x = x^2 - 3x + C.$$

Taigi

$$F(x) = x^2 - 3x + C.$$

Randame $F(x)$ reikšmę, kai $x = 2$:

$$F(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + C = 4 - 6 + C = -2 + C.$$

Randame C, su kuria $F(2) = 2$:

$$-2 + C = 2, \quad C = 4.$$

Radome funkciją

$$f(x) = x^2 - 3x + 4,$$

kurios išvestinė $f'(x) = 2x - 3$ ir

$$f(2) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 4 = 2.$$

Atsakymas. $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

Apibrėžtiniai integralai

K9 (9.1–9.6)

1. Apskaičiuokite integralą.

a) $\int_0^1 (3x^2+2x+4)\,\mathrm{d}x$; b) $\frac{5}{6}\int_1^{64} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$; c) $\int_{\pi}^{\frac{2\pi}{3}} \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$; d) $\int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{1}{x}+x\right)\mathrm{d}x$.

2. Raskite a reikšmę ($a>0$), su kuria teisinga lygybė:

a) $\int_{-\frac{2}{3}}^{a} x^3\,\mathrm{d}x = \frac{65}{324}$; b) $\int_0^a (a-4x)\,\mathrm{d}x = -2+3a+a^2$.

3. Išspręskite lygtį $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = \sin(2x)$.

4. Raskite plotą figūros, apribotos kreivėmis:

a) $y=4x-x^2$, $y=0$; b) $y=2x-2$, $x=-3$, $x=2$, $y=0$;

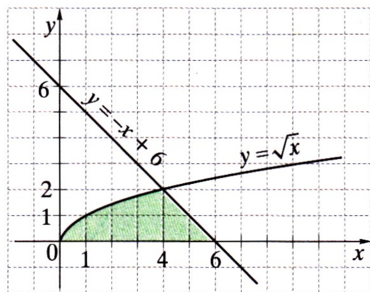
c) $y=x^2$, $y=2-x^2$; d) $y=\frac{5}{x}$, $y=6-x$;

e) $y=\cos x$, $y=0$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{\pi}{2}$.

5. Duota funkcija $f(x)=2x+4$.

1) Raskite šios funkcijos visas pirmykštes.
2) Iš visų pirmykščių funkcijų raskite tą, kurios grafiko liestinė būtų tiesė $y=6x+3$.
3) Apskaičiuokite plotą figūros, apribotos surastosios pirmykštės funkcijos grafiku ir tiesėmis $y=6x+3$, $y=0$.

6. Remdamiesi brėžiniu apskaičiuokite nuspalvintos figūros plotą.



7. Taškas juda tiese. To taško greičio v priklausomybė nuo laiko t išreiškiama formule $v(t)=10t-0{,}008t^3$ (m/s).
Raskite kelią, kurį nueis taškas nuo 10-tos iki 20-tos sekundės.

8. Parabolė, kurios šakos nukreiptos žemyn, kerta Ox ašį taškuose $x=0$ ir $x=1$. Parabolės ir Ox ašies apribotas plotas lygus 2. Užrašykite tos parabolės lygtį.

9. Raskite tūrį sukinio, gauto sukant apie abscisių ašį kreivinę trapeciją, apribotą kreive $y=f(x)$ ir tiesėmis, kai:

a) $f(x)=2+x^2$, tiesės $x=0$, $x=1$, $y=0$;

b) $f(x)=\sqrt{x}$, tiesės $x=9$, $y=0$;

c) $f(x)=\sin x$, tiesės $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$.

1. Apskaičiuokite integralą.

a) $\int\limits_0^1 (x^2 - 2x + 1)\,dx$; b) $\frac{2}{3}\int\limits_1^8 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x^5}}\,dx$; c) $\int\limits_{-\frac{\pi}{12}}^{0} \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)dx$; d) $\int\limits_1^e \left(\frac{1}{x} + 1\right)dx$.

2. Raskite a reikšmę ($a > 0$), su kuria teisinga lygybė:

a) $\int\limits_a^3 \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{3}$; b) $\int\limits_0^{a+1} (3 - 2x)\,dx = -10$.

3. Išspręskite lygtį $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \sin x\,dx = \sin(2\alpha)$.

4. Raskite plotą figūros, apribotos kreivėmis:

a) $y = x - x^2$, $y = 0$; b) $y = 2x^2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$;

c) $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$; d) $y = \frac{2}{x}$, $y = x + 1$, $x = 3$;

e) $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$.

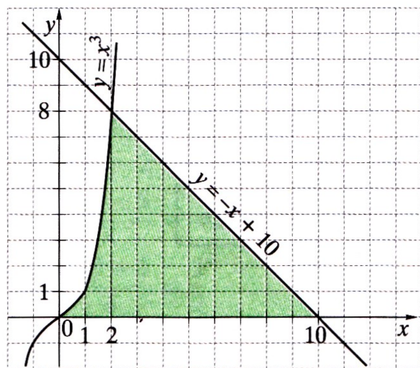
5. Duota funkcija $f(x) = 2x - 2$.

1) Raskite šios funkcijos visas pirmykštes.

2) Iš visų pirmykščių funkcijų raskite tą, kurios grafiko liestinė būtų tiesė $y = -4x$.

3) Apskaičiuokite plotą figūros, apribotos surastosios pirmykštės funkcijos grafiku ir tiesėmis $y = -4x$, $y = 0$.

6. Remdamiesi brėžiniu apskaičiuokite nuspalvintos figūros plotą.



7. Taškas juda tiese. To taško greičio v priklausomybė nuo laiko t išreiškiama formule $v(t) = 10 - 0{,}2t$ (m/s).
Raskite kelią, kurį nueis taškas nuo $t_1 = 3$ s iki $t_2 = 10$ s.

8. Parabolė, kurios šakos nukreiptos į viršų, kerta Ox ašį taškuose $x = 0$ ir $x = 1$. Parabolės ir Ox ašies apribotas plotas lygus 1. Užrašykite tos parabolės lygtį.

9. Raskite tūrį sukinio, gauto sukant apie abscisių ašį kreivinę trapeciją, apribotą kreive $y = f(x)$ ir tiesėmis, kai:

a) $f(x) = x^2 + 3$, tiesės $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$;

b) $f(x) = \frac{2}{x}$, tiesės $x = 1$, $x = 6$, $y = 0$;

c) $f(x) = \cos x$, tiesės $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 0$.

Apibrėžtiniai integralai

K9 (9.1–9.6)

1.

Jeigu funkcija $f(x)$ yra tolydi intervale $[a; b]$ $(a < b)$, o funkcija $F(x)$ yra jos pirmykštė, tai $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

1a. $\int\limits_0^1 (3x^2 + 2x + 4)\,\mathrm{d}x$.

$$\int\limits_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int\limits_0^1 \left(3x^2 + 2x + 4\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 3x^2\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 2x\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^1 4\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{3x^3}{3}\Big|_0^1 + x^2\Big|_0^1 + 4x\Big|_0^1 = x^3\Big|_0^1 + x^2\Big|_0^1 + 4x\Big|_0^1 =$$
$$= 1^3 - 0^3 + 1^2 - 0^2 + 4\cdot 1 - 4\cdot 0 = 1 - 0 + 1 - 0 + 4 - 0 = 6.$$

1b.

$$\frac{5}{6}\int\limits_1^{64} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{6}\int\limits_1^{64} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{6}\int\limits_1^{64} x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{6}\int\limits_1^{64} x^{-\frac{1}{6}}\,\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{5}{6}\cdot\frac{x^{-\frac{1}{6}+1}}{-\frac{1}{6}+1}\Bigg|_1^{64} = \frac{5}{6}\cdot\frac{x^{\frac{5}{6}}}{\frac{5}{6}}\Bigg|_1^{64} = \frac{5}{6}\cdot\frac{6}{5}\cdot\sqrt[6]{x^5}\Big|_1^{64} = \sqrt[6]{x^5}\Big|_1^{64} =$$
$$= \sqrt[6]{64^5} - \sqrt[6]{1^5} = \sqrt[6]{(2^6)^5} - \sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{2^{6\cdot 5}} - 1 = 2^5 - 1 = 31.$$

1c. $\int\limits_\pi^{\frac{2\pi}{3}} \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$.

Galima pirmiausia pertvarkyti $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)$.

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) = \sin\frac{x}{2}.$$

$$\int\limits_\pi^{\frac{2\pi}{3}} \sin\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = -2\cos\frac{x}{2}\Big|_\pi^{\frac{2\pi}{3}} = -2\left(\cos\frac{2\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= -2\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{2}\right) = -2\cdot\left(\frac{1}{2} - 0\right) = -1.$$

1d.

$$\int\limits_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{1}{x} + x\right)\mathrm{d}x = \ln|x|\,\Big|_1^{\mathrm{e}} + \frac{x^2}{2}\Big|_1^{\mathrm{e}} = \ln|\mathrm{e}| - \ln 1 + \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{1^2}{2} =$$
$$= 1 - 0 + \frac{\mathrm{e}^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{e}^2}{2} = \frac{1 + \mathrm{e}^2}{2}.$$

Atsakymas. a) 6; b) 31; c) -1; d) $\frac{1+\mathrm{e}^2}{2}$.

2a. Raskite a reikšmę ($a > 0$), su kuria teisinga lygybė $\int\limits_{-\frac{2}{3}}^{a} x^3\,\mathrm{d}x = \frac{65}{324}$.

$$\int\limits_{-\frac{2}{3}}^{a} x^3\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\Big|_{-\frac{2}{3}}^{a},$$

$$\frac{x^4}{4}\Big|_{-\frac{2}{3}}^{a} = \frac{65}{324},$$

$$\frac{a^4}{4} - \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^4}{4} = \frac{65}{324}\,\Big|\cdot 4,$$

$$a^4 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81}\,\Big|\cdot 81,$$

$$81a^4 - 16 = 65, \quad 81a^4 = 81,$$

$$a^4 = 1, \quad a_1 = -1 \text{ (netinka, nes } -1 < 0), \quad a_2 = 1.$$

2b. Raskite a reikšmę ($a > 0$), su kuria teisinga lygybė $\int\limits_{0}^{a}(a - 4x)\,\mathrm{d}x = -2 + 3a + a^2$.

$$\int\limits_{0}^{a} a\,\mathrm{d}x - \int\limits_{0}^{a} 4x\,\mathrm{d}x = -2 + 3a + a^2,$$

$$ax\,\big|_0^a - 2x^2\,\big|_0^a = -2 + 3a + a^2,$$

$$a \cdot a - a \cdot 0 - \left(2a^2 - 2 \cdot 0^2\right) = -2 + 3a + a^2,$$

$$a^2 - 2a^2 = -2 + 3a + a^2,$$

$$2a^2 + 3a - 2 = 0, \quad D = 9 + 16 = 25,$$

$$a_1 = \frac{-3 - 5}{4} = -2 \text{ (netinka)},$$

$$a_2 = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{1}{2}.$$

Atsakymas. a) $a = 1$; b) $a = \frac{1}{2}$.

3. Išspręskite lygtį $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x = \sin(2x)$.

$$\sin x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin(2x),$$

$$\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = \sin(2x), \quad 1 - 0 = \sin(2x),$$

$$\sin(2x) = 1,$$

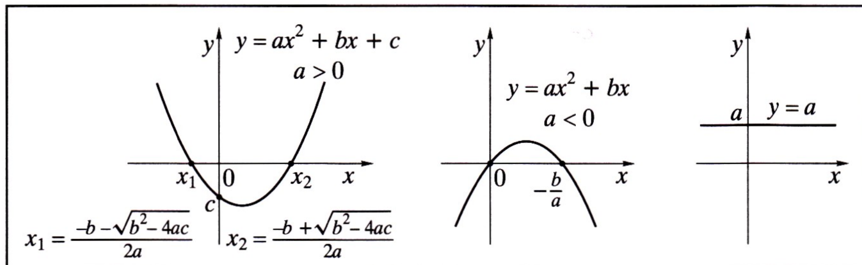
$$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n\,\big|:2,$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \boldsymbol{Z}.$$

Atsakymas. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

4a. Raskite plotą figūros, apribotos kreivėmis $y = 4x - x^2$, $y = 0$.

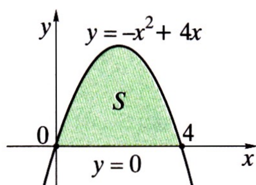
Nusibraižykime brėžinį.
$y = -x^2 + 4x$ — parabolė;
$y = 0$ — tiesė (Ox ašis).

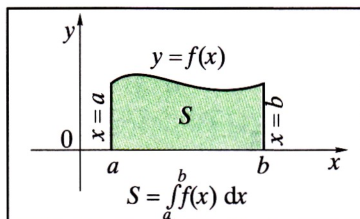


$y = -x^2 + 4x$ kerta x ašį taškuose, kuriuose $y = 0$:

$-x^2 + 4x = 0, \quad x(x-4) = 0, \quad x_1 = 0, x_2 = 4;$

$-1 < 0$ — parabolės šakos nukreiptos žemyn.





Ieškomas plotas:

$$S = \int_0^4 \left(-x^2 + 4x\right) \mathrm{d}x =$$

$$= -\int_0^4 x^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^4 4x \,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{x^3}{3}\Big|_0^4 + 2x^2\Big|_0^4 =$$

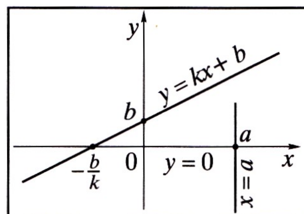
$$= -\frac{4^3}{3} - \left(-\frac{0^3}{3}\right) + 2 \cdot 4^2 - 2 \cdot 0^2 = -\frac{64}{3} - 0 + 2 \cdot 16 - 0 = -\frac{64}{3} + 32 =$$

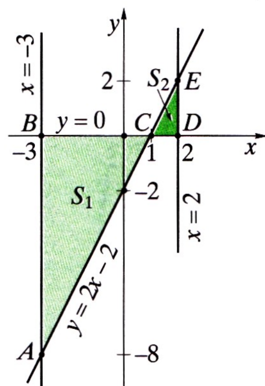
$$= \frac{32}{3}.$$

Atsakymas. $10\frac{2}{3}$ kv. v.

4b. Raskite plotą figūros, apribotos kreivėmis $y = 2x - 2$, $x = -3$, $x = 2$, $y = 0$.

Nusibraižykime brėžinį.
$y = 2x - 2$ — tiesė;
$\left.\begin{matrix} x = -3 \\ x = 2 \end{matrix}\right\}$ — tiesės, lygiagrečios Oy ašiai;
$y = 0$ — Ox ašis.



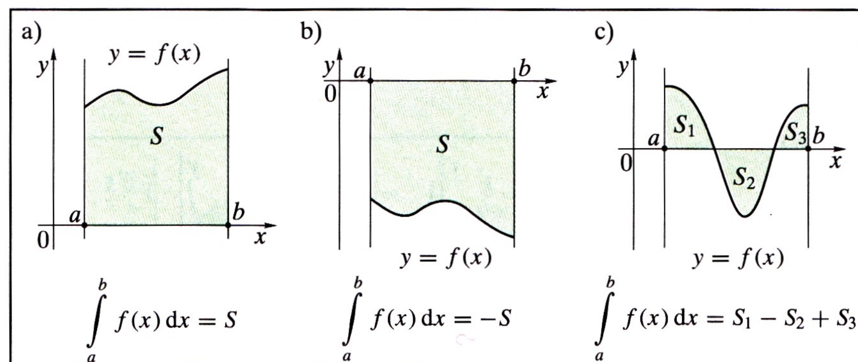


Reikia apskaičiuoti stačiųjų trikampių ABC ir CDE plotų sumą, t. y. $S = S_1 + S_2$.
Žinoma, čia neverta remtis integralais.
Apskaičiuokime S_1.
$\triangle ABC$: statinis $BC = 3 + 1 = 4$ (ilg. v.).
Statinio BA ilgį rasime nustatę taško A koordinatę y.
Taškas A yra tiesėje $y = 2x - 2$, o jo koordinatė $x = -3$. Tada koordinatė y:
$y = 2 \cdot (-3) - 2 = -8$. Vadinasi, $AB = 8$.
$S_{\triangle ABC} = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16$ (kv. v.).

Analogiškai radę CD ir DE ilgius apskaičiuojame S_2.
$CD = 2 - 1 = 1$ (ilg. v.). Kadangi E koordinatė $x = 2$, tai $y = 2 \cdot 2 - 2 = 2$.
Vadinasi, $DE = 2$ (ilg. v.). $S_{\triangle CDE} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$ (kv. v.).

$$S = S_1 + S_2 = 16 + 1 = 17 \text{ (kv. v.)}$$

Galima plotą apskaičiuoti ir integruojant.



$$-\int_{-3}^{1} (2x - 2)\,dx + \int_{1}^{2} (2x - 2)\,dx = -(x^2 - 2x)\Big|_{-3}^{1} + (x^2 - 2x)\Big|_{1}^{2} =$$

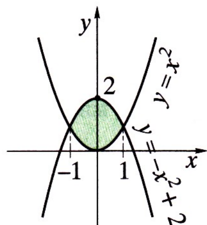
$$= -(1^2 - 2 \cdot 1) + (-3)^2 + (-2) \cdot (-3) + 2^2 - 2 \cdot 2 - (1^2 - 2 \cdot 1) =$$

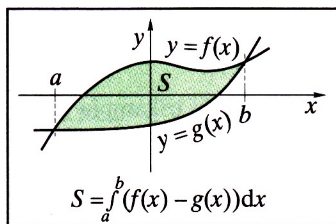
$$= 1 + 9 + 6 + 4 - 4 + 1 = 17 \text{ (kv. v.)}.$$

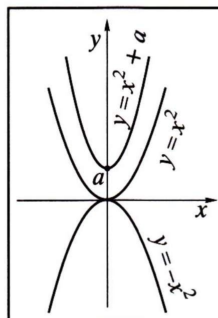
Atsakymas. 17 kv. v.

4c. Raskite plotą figūros, apribotos kreivėmis $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.

Nusibraižykime brėžinį.
$y = x^2$ — parabolė;
$y = -x^2 + 2$ — parabolė.







Apskaičiuokime parabolių $y = x^2$ ir $y = -x^2 + 2$ susikirtimo taškų x koordinates:

$$x^2 = -x^2 + 2, \quad 2x^2 = 2, \quad x^2 = 1; \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$$

Ieškomą plotą rasime suintegravę:

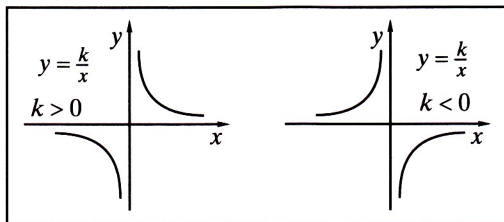
$$\int_{-1}^{1} \left((-x^2 + 2) - x^2\right) dx = \int_{-1}^{1} \left(-2x^2 + 2\right) dx = \left(-\frac{2}{3}x^3 + 2x\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

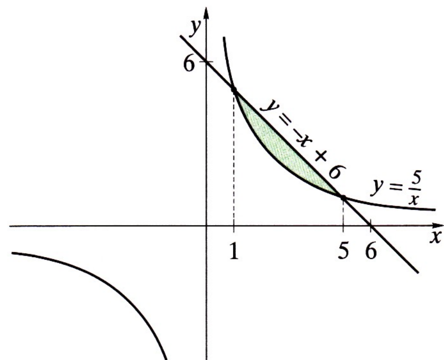
$$= -\frac{2}{3} \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^3 - \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (-1)^3 - 2 \cdot (-1) = -\frac{2}{3} + 2 - \frac{2}{3} + 2 = 2\frac{2}{3} \text{ (kv. v.)}.$$

Atsakymas. $2\frac{2}{3}$ kv. v.

4d. Raskite plotą figūros, apribotos kreivėmis $y = \frac{5}{x}$, $y = 6 - x$.

Nusibraižykime brėžinį.
$y = \frac{5}{x}$ — hiperbolė;
$y = -x + 6$ — tiesė.





Tiesė ir hiperbolė kertasi taškuose, kurių x koordinatės tenkina lygybę $\frac{5}{x} = -x + 6$. Randame tuos x:

$$\frac{5}{x} = -x + 6 \,\big|\cdot x \ (x > 0),$$
$$5 = -x^2 + 6x,$$
$$x^2 - 6x + 5 = 0, \quad D = 16,$$
$$x_1 = \frac{6-4}{2} = 1, \quad x_2 = \frac{6+4}{2} = 5.$$

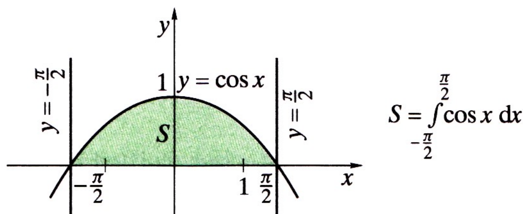
Ieškomas plotas lygus integralo $\int_1^5 \left((-x+6) - \frac{5}{x}\right) dx$ reikšmei:

$$\int_1^5 \left(-x + 6 - \frac{5}{x}\right) dx = \left(-\frac{x^2}{2} + 6x - 5\ln|x|\right)\Big|_1^5 =$$
$$= -\frac{5^2}{2} + 6\cdot 5 - 5\ln|5| - \left(-\frac{1^2}{2}\right) - 6\cdot 1 + 5\ln|1| =$$
$$= -\frac{25}{2} + 30 - 5\ln 5 + \frac{1}{2} - 6 + 5\ln 1 = -\frac{24}{2} + 24 - 5\ln 5 + 0 =$$
$$= 12 - 5\ln 5.$$

Atsakymas. $12 - 5\ln 5$ (kv. v.).

4e. Raskite plotą figūros, apribotos kreivėmis $y = \cos x$, $y = 0$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$.

$y = \cos x$ — kosinusoidė;
$y = 0$ — Ox ašis;
$x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$ — tiesės lygiagrečios Oy ašiai.



$$S = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

Skaičiuojame integralo reikšmę:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \sin x \,\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2.$$

Atsakymas. 2 kv. v.

5. Duota funkcija $f(x) = 2x + 4$.

1) Raskite šios funkcijos visas pirmykštes.
2) Iš visų pirmykščių funkcijų raskite tą, kurios grafiko liestinė būtų tiesė $y = 6x + 3$.
3) Apskaičiuokite plotą figūros, apribotos surastosios pirmykštės funkcijos grafiku ir tiesėmis $y = 6x + 3$, $y = 0$.

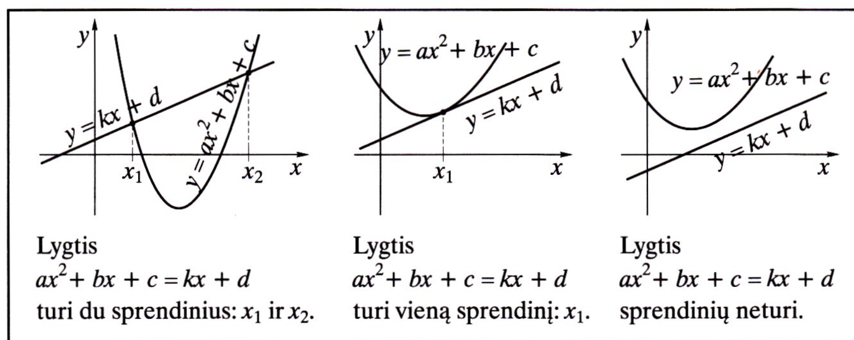
Sprendimas.

1) $\int(2x + 4)\,\mathrm{d}x = x^2 + 4x + C$. Funkcijos $f(x) = 2x + 4$ pirmykštės yra

$$F(x) = x^2 + 4x + C; \quad \text{čia } C \text{ — skaičius.}$$

Pasitikriname: $F'(x) = \left(x^2 + 4x + C\right)' = 2x + 4 = f(x)$.

2) Funkcijų $F(x) = x^2 + 4x + C$ grafikai yra parabolės. Reikia rasti tą C reikšmę, kad parabolė $y = x^2 + 4x + C$ ir tiesė $y = 6x + 3$ turėtų vienintelį bendrą tašką.



Iš lygybės

$$x^2 + 4x + C = 6x + 3, \quad x^2 - 2x + C - 3 = 0,$$

ieškome tokios C reikšmės, kad diskriminantas

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (C - 3) = 4 - 4C + 12 = -4C + 16$$

būtų lygus 0. Sprendžiame lygtį:

$$-4C + 16 = 0, \quad C = 4.$$

Kai $C = 4$, tai lygtis

$$x^2 + 2x + C - 3 = x^2 - 2x + 1 = 0$$

turi vienintelį sprendinį. O tai reiškia, kad parabolė

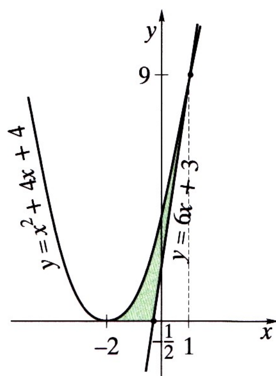
$$y = x^2 + 4x + 4$$

ir tiesė

$$y = 6x + 3$$

turi vienintelį bendrą tašką, t. y. tiesė yra parabolės liestinė.

3) Nusibraižykime brėžinį.



Raskime $y = x^2 + 4x + 4$ ir $y = 6x + 3$ bendro taško koordinatę x:
$x^2 + 4x + 4 = 6x + 3$,
$x^2 - 2x + 1 = 0$,
$(x-1)^2 = 0$, $x = 1$.
Raskime tašką, kuriame tiesė $y = 6x + 3$ kerta Ox ašį:
$6x + 3 = 0$, $x = -\frac{1}{2}$.

Iš brėžinio matome, kad ieškomas plotas lygus integralo $\int_{-2}^{1}(x^2+4x+4)\,dx$ reikšmei minus plotas stačiojo trikampio, kurio statinių ilgiai yra 9 ir $1+\frac{1}{2}$ (integralo $\int_{-\frac{1}{2}}^{1}(6x+3)\,dx$ reikšmei).

Skaičiuojame:

$$\int_{-2}^{1}\left(x^2+4x+4\right)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{1} + 2x^2\Big|_{-2}^{1} + 4x\Big|_{-2}^{1} =$$

$$= \frac{1}{3} - \left(-\frac{8}{3}\right) + 2 - 8 + 4 + 8 = 9 \text{ (kv. v.)};$$

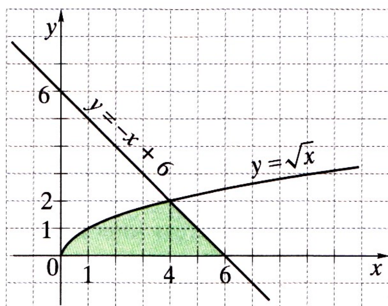
$$S_\triangle = \frac{1}{2}\cdot 9\cdot\frac{3}{2} = \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4} \text{ (kv. v.)}.$$

Ieškomas plotas:

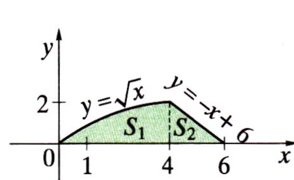
$$9 - 6\frac{3}{4} = 2\frac{1}{4} \text{ (kv. v.)}.$$

Atsakymas. 1) $F(x) = x^2 + 4x + C$;
2) $F_1(x) = x^2 + 4x + 4$;
3) $2\frac{1}{4}$ kv. v.

6. Remdamiesi brėžiniu apskaičiuokite nuspalvintos figūros plotą.



Reikia apskaičiuoti $S = S_1 + S_2$:



$$S_1 = \int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x,$$

$$S_2 = \int_4^6 (-x+6)\,\mathrm{d}x.$$

Skaičiuojame:

$$S_1 = \int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_0^4 = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_0^4 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^4 =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\sqrt{4^3} - \frac{2}{3}\sqrt{0^3} = \frac{16}{3};$$

$$S_2 = \int_4^6 (-x+6)\,\mathrm{d}x = -\frac{x^2}{2}\Big|_4^6 + 6x\Big|_4^6 = -18+8+36-24 = 2;$$

$$S = \frac{16}{3} + 2 = 7\frac{1}{3}.$$

Atsakymas. $7\frac{1}{3}$ kv. v.

7. Taškas juda tiese. To taško greičio v priklausomybė nuo laiko t išreiškiama formule $v(t) = 10t - 0{,}008t^3$ (m/s). Raskite kelią, kurį nueis taškas nuo 10-tos iki 20-tos sekundės.

Reikia rasti, kaip taško nueitas kelias s priklauso nuo laiko t.
Žinoma, kad kelio $s(t)$ išvestinė yra gretis $v(t)$, t. y.:

$$s'(t) = v(t).$$

Žinodami $v(t) = 10t - 0{,}008t^3$ galime rasti $s(t)$, — funkcijos $v(t)$ pirmykštę.
O ieškomas kelias bus skirtumas:

$$s(t_2) - s(t_1) = s(20) - s(10).$$

Visa tai galima užrašyti tokiu integralu:

$$\int_{10}^{20} \left(10t - 0{,}008t^3\right)\mathrm{d}t = 5t^2\Big|_{10}^{20} - 0{,}002t^4\Big|_{10}^{20} =$$

$$= 5\cdot\left(20^2 - 10^2\right) - 0{,}002\cdot\left(20^4 - 10^4\right) =$$

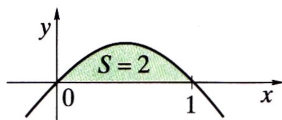
$$= 5\cdot(20-10)\cdot(20+10) - 0{,}002\cdot\left(20^2-10^2\right)\left(20^2+10^2\right) =$$

$$= 5\cdot 10\cdot 30 - 0{,}002\cdot 10\cdot 30\cdot 500 = 1500 - 300 =$$

$$= 1200\ (\text{m}).$$

Atsakymas. 1200 m.

8. Parabolė, kurios šakos nukreiptos žemyn, kerta Ox ašį taškuose $x = 0$ ir $x = 1$. Parabolės ir Ox ašies apribotas plotas lygus 2. Užrašykite tos parabolės lygtį.



> Parabolės taškų koordinatės x ir y susijusios lygybe $y = ax^2 + bx + c$ — parabolės lygtis.

Kadangi parabolė eina per tašką $x = 0$, $y = 0$, tai teisinga lygybė

$$0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c, \quad c = 0.$$

Parabolės, einančios per koordinačių pradžios tašką, lygtis

$$y = ax^2 + bx.$$

Kadangi parabolė eina per tašką $x = 1$, $y = 0$, tai teisinga lygybė

$$0 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1, \quad a + b = 0, \quad b = -a.$$

Vadinasi, parabolės, einančios per taškus

$$(0; 0) \quad \text{ir} \quad (1; 0)$$

lygtis yra

$$y = ax^2 - ax; \quad a \text{ — skaičius, kurį reikia rasti.}$$

Ta parabolė ir Ox ašis riboja plotą $S = 2$. Tą plotą galima užrašyti integralu:

$$S = \int_0^1 (ax^2 - ax)\,\mathrm{d}x = a \int_0^1 (x^2 - x)\,\mathrm{d}x.$$

a reikšmę rasime iš lygybės:

$$a \int_0^1 (x^2 - x)\,\mathrm{d}x = 2,$$

$$a\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right) = 2,$$

$$a\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = 2,$$

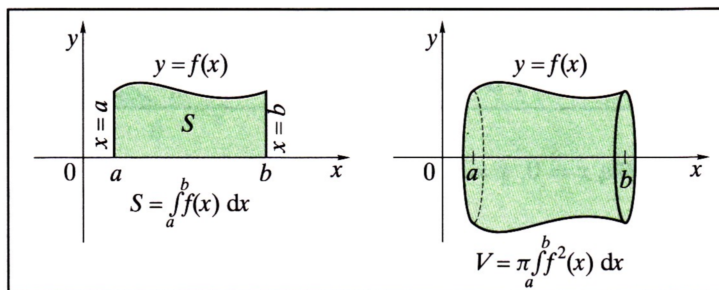
$$a \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = 2,$$

$$a = -12.$$

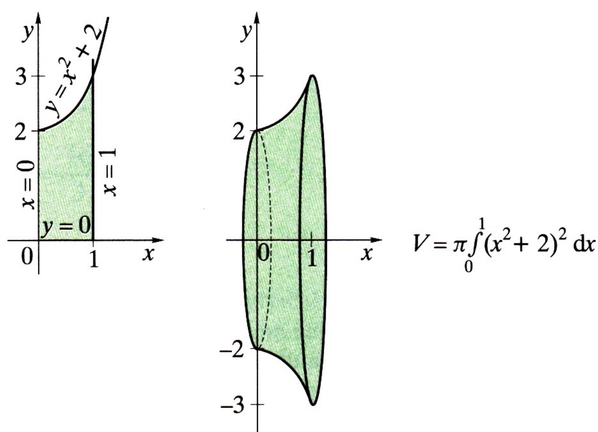
Vadinasi, ieškomos parabolės lygtis yra

$$y = -12x^2 + 12x.$$

9a. Raskite tūrį sukinio, gauto sukant apie abscisių ašį kreivinę trapeciją, apribotą kreive $f(x) = 2 + x^2$ ir tiesėmis $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$.



Pabraižykime:



Skaičiuojame integralo reikšmę:

$$\pi \int_0^1 \left(x^2 + 2\right)^2 dx = \pi \int_0^1 \left(x^4 + 4x^2 + 4\right) dx =$$

$$= \pi \cdot \left(\frac{x^5}{5}\Big|_0^1 + \frac{4}{3}x^3\Big|_0^1 + 4x\Big|_0^1\right) =$$

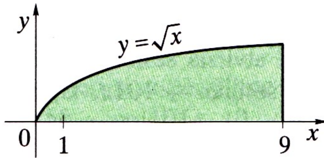
$$= \pi \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{3} + 4\right) = 5\frac{8}{15}\pi.$$

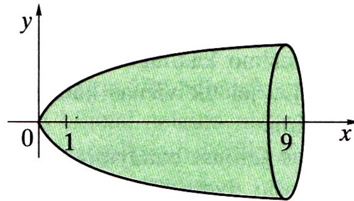
Vadinasi, sukinio tūris

$$V = 5\frac{8}{15}\pi \text{ (kub. v.).}$$

9b. Raskite tūrį sukinio, gauto sukant apie abscisių ašį kreivinę trapeciją, apribotą kreive $f(x) = \sqrt{x}$ ir tiesėmis $x = 9$, $y = 0$.

Pasidarykime brėžinį (nors tai nebūtina).



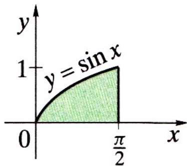


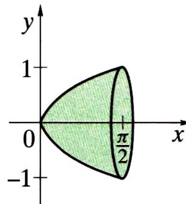
$V = \pi \int_0^a (\sqrt{x})^2 \, dx$

Skaičiuojame integralo reikšmę — rasime sukinio tūrį:

$$V = \pi \int_0^9 \left(\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi \int_0^9 x \, dx = \pi \frac{x^2}{2} \Big|_0^9 = \frac{81}{2}\pi \text{ (kub. v.).}$$

9c. Raskite tūrį sukinio, gauto sukant apie abscisių ašį kreivinę trapeciją, apribotą kreive $f(x) = \sin x$ ir tiesėmis $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$.





$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$

Čia kiek sunkiau rasti $\sin^2 x$ pirmykštę.

$$\boxed{2\sin^2 x = 1 - \cos(2x)}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x).$$

$$\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\right) dx = \frac{1}{2}\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos(2x)\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\pi \left(x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\sin(2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi + \frac{1}{2}\sin 0\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0 + 0\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Sukinio tūris $V = \frac{\pi^2}{4}$ (kub. v.).

Atsakymas. a) $5\frac{8}{15}\pi$; b) $40\frac{1}{2}\pi$; c) $\frac{\pi^2}{4}$.

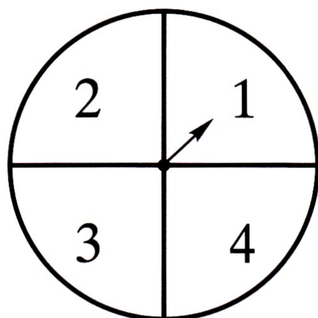
Tikimybės

K10 (11.1–12.2)

1. Atsitiktinis dydis X — vieną kartą mesto šešiasienio lošimo kauliuko atvirtusių akučių skaičius. Užrašykite lygybes, nurodančias, kaip atsitiktinio dydžio X reikšmės priklauso nuo bandymo baigčių, kai lošimo kauliuko sienelėse sužymėtų akučių skaičiai yra:
a) 1, 1, 3, 3, 5, 5; b) 2, 2, 2, 3, 4, 5.

2. Lošėjas meta du lošimo kauliukus. Jei abu kauliukai atvirsta šešiomis akutėmis, tai lošėjas laimi 100 Lt, jei tik vienas kauliukas atvirsta šešiuke — 10 Lt, kitais atvejais lošėjas nieko nelaimi.
1) Surašykite visas galimas bandymo baigtis.
2) Tegu X — išlošio dydis po vieno kauliukų metimo. Kokias reikšmes gali įgyti atsitiktinis dydis X?
3) Užrašykite lygybes, nurodančias, kaip X reikšmės priklauso nuo bandymo baigčių.
4) Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.

3. Lošimo ratas suskirstytas į 4 vienodo dydžio sektorius, sunumeruotus skaičiais 1, 2, 3, 4.



Lošiama sukant ratą 2 kartus ir užrašant rezultatus — sektorių, kuriuose atsidūrė rodyklė, numerius. Be to ratas įrengtas taip, kad jį pasukus antrą kartą, rodyklė negali atsidurti tame pačiame sektoriuje, kuriame buvo po pirmojo pasukimo. Tegu X yra dviejų pasukimų mažesnysis rezultatas, o Y — didesnysis.
1) Sudarykite bandymo baigčių aibę.
2) Užrašykite lygybes, nurodančias, kaip atsitiktinių dydžių X ir Y reikšmės priklauso nuo bandymo baigčių.
3) Sudarykite atsitiktinių dydžių X ir Y skirstinius.
4) Sudarykite atsitiktinių dydžių poros (X, Y) skirstinį.
5) Nustatykite, ar dydžiai X ir Y yra priklausomi.

4. Lentelė yra atsitiktinio dydžio X tikimybių skirstinys. Raskite nežinomą tikimybę p.

a)

$m =$	1	2	3	4
$\mathbf{P}(X = m) =$	0,35	p	0,38	0,19

b)

$m =$	-8	-6	-4	-2	0
$\mathbf{P}(X = m) =$	$\frac{7}{36}$	p	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{12}$

Pavaizduokite skirstinius grafiškai.

5. Krepšininkas pataiko 75% baudos metimų. Nuo baudos metimų linijos jis ruošiasi mesti 6 kartus. Kokia tikimybė, kad krepšininkas pataikys:
a) lygiai 1 kartą? b) lygiai 3 kartus? c) visus kartus?

6. Lošimo kauliukas metamas penkis kartus. Stebimas įvykis, kad atvirs daugiau negu 4 akutės. Apskaičiuokite tikimybę, kad stebimas įvykis:
a) įvyks 1 kartą arba nė karto; b) įvyks ne mažiau negu 3 kartus.

7. a) Loterijai atspausdinta 1000 bilietų, iš kurių 200 bilietų laimi po 1 Lt, 100 — po 5 Lt, 50 — po 10 Lt, 10 — po 50 Lt, kiti bilietai nelaimi nieko. Atsitiktinis dydis X — vieno bilieto laimėjimo dydis. Raskite atsitiktinio dydžio X skirstinį. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį ir dispersiją.
b) Medžiotojas turi 4 šovinius. Tikimybė medžiotojui vienu šūviu pataikyti į bėgantį kiškį lygi $\frac{1}{4}$. Atsitiktinis dydis X — šūvių į kiškį iki pirmo pataikymo skaičius. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X vidurkį ir standartinį nuokrypį.
c) Lošimo kauliuku lošiama taip: jei metus kauliuką atvirto mažiau kaip 4 akutės, tai šis akučių skaičius ir yra lošimo rezultatas, jei atvirto daugiau kaip 3 akutės, tai metame dar kartą, o lošimo rezultatas — abiejuose metimuose atvirtusių akučių suma. Kokia atsitiktinio dydžio X, reiškiančio lošimo rezultatą, matematinė viltis?

8. Iš nelygybės

$$3^{\frac{x^2-4x+3}{x^2-11x+24}} < 1$$

sveikųjų sprendinių atsitiktinai parenkamas vienas skaičius. Kokia tikimybė, kad pasirinktas skaičius yra dalus iš dviejų?

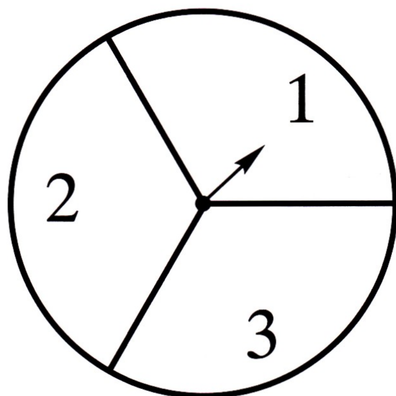
Tikimybės

K10 (11.1–12.2)

1. Atsitiktinis dydis X — vieną kartą mesto šešiasienio lošimo kauliuko atvirtusių akučių skaičius. Užrašykite lygybes, nurodančias, kaip atsitiktinio dydžio X reikšmės priklauso nuo bandymo baigčių, kai lošimo kauliuko sienelėse sužymėtų akučių skaičiai yra:
a) 2, 2, 3, 4, 5, 5; b) 2, 2, 4, 4, 5, 5.

2. Šaulys turi tris šovinius ir šaudo į taikinį iki pirmo nepataikymo. Tegu X — šaulio pataikymų skaičius.
1) Sudarykite bandymo baigčių aibę.
2) Užrašykite lygybes, apibrėžiančias atsitiktinį dydį X.
3) Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.

3. Lošimo ratas suskirstytas į 3 vienodo dydžio sektorius, sunumeruotus skaičiais 1, 2, 3.



Lošiama sukant ratą 2 kartus ir užrašant rezultatus — sektorių, kuriuose atsidūrė rodyklė numerius. Be to ratas įrengtas taip, kad jį pasukus antrą kartą, rodyklė negali atsidurti tame pačiame sektoriuje, kuriame buvo po pirmojo pasukimo. Tegu X yra dviejų pasukimų mažesnysis rezultatas, o Y — didesnysis.
1) Sudarykite bandymo baigčių aibę.
2) Užrašykite lygybes, nurodančias, kaip atsitiktinių dydžių X ir Y reikšmės priklauso nuo bandymo baigčių.
3) Sudarykite atsitiktinių dydžių X ir Y skirstinius.
4) Sudarykite atsitiktinių dydžių poros (X, Y) skirstinį.
5) Nustatykite, ar dydžiai X ir Y yra priklausomi.

4. Lentelė yra atsitiktinio dydžio X tikimybių skirstinys. Raskite nežinomą tikimybę p.

a)

$m =$	3	4	5	6
$\mathbf{P}(X = m) =$	0,17	0,31	0,42	p

b)

$m =$	-2	-1	0	1	2
$\mathbf{P}(X = m) =$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{3}$	p

Pavaizduokite skirstinius grafiškai.

5. Mieste apdrausta 80% visų automobilių. Apskaičiuokite tikimybę, kad iš 6 atsitiktinai paimtų to miesto automobilių bus apdrausti:
a) keturi automobiliai; b) trys automobiliai.

6. Metami du lošimo kauliukai. Kokia tikimybė, kad kauliukus metus 5 kartus ant abiejų kauliukų atvirtusių akučių suma bus lygi 6:
a) lygiai 2 kartus? b) mažiau kaip tris kartus?

7. a) Loterijai atspausdinta 1000 bilietų, iš kurių 200 bilietų laimi po 1 Lt, 100 — po 5 Lt, 80 — po 20 Lt, 20 — po 50 Lt, kiti bilietai nelaimi nieko. Atsitiktinis dydis X — bilieto laimėjimo dydis. Raskite atsitiktinio dydžio skirstinį. Apskaičiuokite jo matematinę viltį ir dispersiją.
b) Tikimybė, kad optikos salone žmogus galės įsigyti tinkamus akinius, lygi 0,4. Mieste yra keturi optikos salonai. Žmogus eina į salonus tol, kol randa tinkamus akinius. Atsitiktinis dydis X — žmogaus aplankytų salonų skaičius. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X vidurkį, dispersiją ir standartinį nuokrypį.
c) Kauliuku lošiama taip: jei metus lošimo kauliuką atvirto daugiau kaip trys akutės, tai šis skaičius ir yra lošimo rezultatas. Jei atvirto mažiau kaip 4 akutės, metame kauliuką dar kartą, o lošimo rezultatas — abiejuose metimuose atvirtusių akučių suma. Koks atsitiktinio dydžio, reiškiančio mūsų lošimo rezultatą, vidurkis?

8. Iš natūraliųjų skaičių, kurie yra nelygybės

$$\left(\sqrt[3]{7}\right)^{35x} > 7^{4x^2-12x-2}$$

sprendiniai, atsitiktinai paimamas vienas skaičius. Kokia tikimybė, kad paimtasis skaičius bus trijų kartotinis?

1a. Atsitiktinis dydis X — vieną kartą mesto šešiasienio lošimo kauliuko atvirtusių akučių skaičius. Užrašykite lygybes, nurodančias, kaip atsitiktinio dydžio X reikšmės priklauso nuo bandymo baigčių, kai lošimo kauliuko sienelėse sužymėtų akučių skaičiai yra 1, 1, 3, 3, 5, 5.

Kauliukas gali atvirsti bet kuria iš šešių sienelių. Sieneles sužymėkime taip: e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6. Bandymo baigčių aibę E galima užrašyti taip:

$$E = \{e_1; e_2; e_3; e_4; e_5; e_6\}.$$

Bandymo baigtis galima surašyti taip:

$$e_1 = (1), \quad e_2 = (1), \quad e_3 = (3), \quad e_4 = (3), \quad e_5 = (5), \quad e_6 = (5).$$

Atsitiktinis dydis X gali įgyti tris skirtingas reikšmes: 1, 3 ir 5. Galimų X reikšmių aibė yra:

$$X = \{1; 3; 5\}.$$

Atsitiktinio dydžio X reikšmių priklausomybę nuo bandymo baigčių galima užrašyti taip:

$$X(e_1) = 1, \quad X(e_2) = 1, \quad X(e_3) = 3, \quad X(e_4) = 3,$$
$$X(e_5) = 5, \quad X(e_6) = 6.$$

Atsakymas. $X(e_1) = X(e_2) = 1$,
$X(e_3) = X(e_4) = 3$,
$X(e_5) = X(e_6) = 5$.

1b. Atsitiktinis dydis X — vieną kartą mesto šešiasienio lošimo kauliuko atvirtusių akučių skaičius. Užrašykite lygybes, nurodančias, kaip atsitiktinio dydžio X reikšmės priklauso nuo bandymo baigčių, kai lošimo kauliuko sienelėse sužymėtų akučių skaičiai yra 2, 2, 2, 3, 4, 5.

Bandymo baigtys:

$$e_1 = (2), \quad e_2 = (2), \quad e_3 = (2), \quad e_4 = (3), \quad e_5 = (4), \quad e_6 = (5).$$

Atsitiktinį dydį X apibrėžia lygybės:

$$X(e_1) = X(e_2) = X(e_3) = 2,$$
$$X(e_4) = 3, \quad X(e_5) = 4, \quad X(e_6) = 5.$$

2. Lošėjas meta du lošimo kauliukus. Jei abu kauliukai atvirsta šešiomis akutėmis, tai lošėjas laimi 100 Lt, jei tik vienas kauliukas atvirsta šešiuke — 10 Lt, kitais atvejais lošėjas nieko nelaimi.

1) Surašykite visas galimas bandymo baigtis.
2) Tegu X — išlošio dydis po vieno kauliukų metimo. Kokias reikšmes gali įgyti atsitiktinis dydis X?
3) Užrašykite lygybes, nurodančias, kaip X reikšmės priklauso nuo bandymo baigčių.
4) Sudarykite atsitiktinio dydžio X skirstinį.

2.1. Visas bandymo baigtis patogu surašyti lentelėje:

	⚀	⚁	⚂	⚃	⚄	⚅
⚀	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)
⚁	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)
⚂	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)
⚃	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)
⚄	(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)
⚅	(6; 1)	(6; 2)	(6; 3)	(6; 4)	(6; 5)	(6; 6)

Iš viso yra 36 skirtingos bandymo baigtys.

2.2. Išlošti galima 100 Lt, 10 Lt arba 0 Lt. Vadinasi, atsitiktinis dydis X gali įgyti tris reikšmes

$$X = \{0;\ 10;\ 100\}.$$

2.3. Reikšmę 100 atsitiktinis dydis X įgyja tik kai bandymo baigtis yra (6; 6). Vadinasi,

$$X(6;\ 6) = 100.$$

Reikšmę 10 atsitiktinis dydis X įgyja dešimties baigčių atveju, t. y.:

$$X(1;\ 6) = X(2;\ 6) = X(3;\ 6) = X(4;\ 6) = X(5;\ 6) =$$
$$= X(6;\ 1) = X(6;\ 2) = X(6;\ 3) = X(6;\ 4) = X(6;\ 5) = 10.$$

Visų kitų baigčių atvejais (o tokių baigčių yra 25) atsitiktinis dydis X įgyja reikšmę 0:

$$X(1;\ 1) = \ldots = X(1;\ 5) = X(2;\ 1) = \ldots = X(2;\ 5) = X(3;\ 1) = \ldots =$$
$$= X(3;\ 5) = X(4;\ 1) = \ldots = X(4;\ 5) = X(5;\ 1) = \ldots = X(5;\ 5) = 0.$$

2.4.

Atsitiktinio dydžio X įgyjamoms reikšmėms $x_1, x_2, \ldots, x_n$ priskyrę tų reikšmių tikimybes $\mathbf{P}(X = x_1)$, $\mathbf{P}(X = x_2)$, ..., $\mathbf{P}(X = x_n)$, galime sudaryti lentelę:

Atsitiktinio dydžio X reikšmės	x_1	x_2	...	x_n
X reikšmių tikimybės	$\mathbf{P}(x_1)$	$\mathbf{P}(x_2)$	...	$\mathbf{P}(x_n)$

Tokia lentelė vadinama atsitiktinio dydžio X tikimybiniu skirstiniu, arba tiesiog skirstiniu.
Beje, $\mathbf{P}(x_1) + \mathbf{P}(x_2) + \cdots + \mathbf{P}(x_n) = 1$.

Reikia apskaičiuoti, kam lygios tikimybės laimėti 100 Lt, 10 Lt ir 0 Lt.

Kadangi 100 Lt laimėjimą atitinka viena baigtis (6; 6) iš 36 galimų baigčių, tai

$$\mathbf{P}(X = 100) = \frac{1}{36}.$$

Kadangi 10 Lt laimėjimą atitinka 10 baigčių iš 36, tai

$$\mathbf{P}(X = 10) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

Kadangi 0 Lt laimėjimą atitinka 25 baigtys iš 36, tai

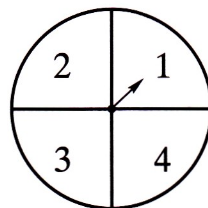
$$\mathbf{P}(X = 0) = \frac{25}{36}.$$

Surašykime tai lentelėje ir turėsime atsakymą.

Atsakymas.

Atsitiktinio dydžio X reikšmės	0	10	100
X reikšmių tikimybės	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

3. Lošimo ratas suskirstytas į 4 vienodo dydžio sektorius, sunumeruotus skaičiais 1, 2, 3, 4. Lošiama sukant ratą 2 kartus ir užrašant rezultatus — sektorių, kuriuose atsidūrė rodyklė, numerius. Be to ratas įrengtas taip, kad jį pasukus antrą kartą, rodyklė negali atsidurti tame pačiame sektoriuje, kuriame buvo po pirmojo pasukimo. Tegu X yra dviejų pasukimų mažesnysis rezultatas, o Y — didesnysis.



1) Sudarykite bandymo baigčių aibę.
2) Užrašykite lygybes, nurodančias, kaip atsitiktinių dydžių X ir Y reikšmės priklauso nuo bandymo baigčių.
3) Sudarykite atsitiktinių dydžių X ir Y skirstinius.
4) Sudarykite atsitiktinių dydžių poros (X, Y) skirstinį.
5) Nustatykite, ar dydžiai X ir Y yra priklausomi.

3.1. $e_1 = (1; 2)$, $e_2 = (1; 3)$, $e_3 = (1; 4)$,
$e_4 = (2; 1)$, $e_5 = (2; 3)$, $e_6 = (2; 4)$,
$e_7 = (3; 1)$, $e_8 = (3; 2)$, $e_9 = (3; 4)$,
$e_{10} = (4; 1)$, $e_{11} = (4; 2)$, $e_{12} = (4; 3)$.

Bandymo baigčių aibę sudaro 12 baigčių: $E = \{e_1; ...; e_{12}\}$.

3.2. $X(e_1) = 1$, $X(e_2) = 1$, $X(e_3) = 1$,
$X(e_4) = 1$, $X(e_5) = 2$, $X(e_6) = 2$,
$X(e_7) = 1$, $X(e_8) = 2$, $X(e_9) = 3$,
$X(e_{10}) = 1$, $X(e_{11}) = 2$, $X(e_{12}) = 3$;

$Y(e_1) = 2$, $Y(e_2) = 3$, $Y(e_3) = 4$,
$Y(e_4) = 2$, $Y(e_5) = 3$, $Y(e_6) = 4$,
$Y(e_7) = 3$, $Y(e_8) = 3$, $Y(e_9) = 4$,
$Y(e_{10}) = 4$, $Y(e_{11}) = 4$, $Y(e_{12}) = 4$.

3.3. Atsitiktinis dydis X gali įgyti 3 skirtingas reikšmes

$$X = \{1; 2; 3\}.$$

Atsitiktinis dydis X reikšmę 1 įgyja 6 baigčių iš 12 atveju, todėl jo tikimybė:

$$\mathbf{P}(X = 1) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}.$$

Atsitiktinis dydis X reikšmę 2 įgyja 4 baigčių atveju, todėl: $\mathbf{P}(X = 2) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.
Atsitiktinis dydis X reikšmę 3 įgyja 2 baigčių atveju: $\mathbf{P}(X = 3) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.
Atsitiktinio dydžio X skirstinys:

$m =$	1	2	3
$\mathbf{P}(X = m) =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Pasitikriname: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$.

Analogiškai sudarome atsitiktinio dydžio Y skirstinį:

$m =$	2	3	4
$\mathbf{P}(Y = m) =$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

3.4. Atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes 1, 2, 3. Atsitiktinis dydis Y įgyja reikšmes 2, 3, 4. Surašykime visas galima (X, Y) poras:

$$\begin{matrix} (1,2), & (1,3), & (1,4), \\ & (2,3), & (2,4), \\ & & (3,4). \end{matrix}$$

Pavyzdžiui, pora (2, 3) reiškia, kad bandymui pasibaigus dydis X bus įgijęs reikšmę 2, o dydis Y bus įgijęs reikšmę 3. Beje, poros (X, Y) turi būti tokios, kad $X < Y$.
Akivaizdu, kad kiekvienos poros tikimybė lygi $\frac{1}{6}$. Skirstinys:

$(X, Y) =$	$(1, 2)$	$(1, 3)$	$(1, 4)$	$(2, 3)$	$(2, 4)$	$(3, 4)$
$\mathbf{P}(X, Y) =$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

3.5.

> Atsitiktiniai dydžiai X ir Y vadinami nepriklausomais, jeigu su visomis jų reikšmėmis x, y yra teisingos lygybės $\mathbf{P}(X = x, Y = y) = \mathbf{P}(X = x) \cdot \mathbf{P}(Y = y)$.

Reikia patikrinti, ar teisingos lygybės:
$\mathbf{P}(X = 1, Y = 2) = \mathbf{P}(X = 1) \cdot \mathbf{P}(Y = 2)$,
$\mathbf{P}(X = 1, Y = 3) = \mathbf{P}(X = 1) \cdot \mathbf{P}(Y = 3)$,
$\mathbf{P}(X = 1, Y = 4) = \mathbf{P}(X = 1) \cdot \mathbf{P}(Y = 4)$,
$\mathbf{P}(X = 2, Y = 3) = \mathbf{P}(X = 2) \cdot \mathbf{P}(Y = 3)$,
$\mathbf{P}(X = 2, Y = 4) = \mathbf{P}(X = 2) \cdot \mathbf{P}(Y = 4)$,
$\mathbf{P}(X = 3, Y = 4) = \mathbf{P}(X = 3) \cdot \mathbf{P}(Y = 4)$.
Iš tikrųjų, visų tikrinamų lygybių kairiųjų pusių tikimybės yra lygios $\frac{1}{6}$.

Skaičiuokime dešiniųjų lygybės pusių tikimybių sandaugas:

$$\mathbf{P}(X = 1) \cdot \mathbf{P}(Y = 2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{6}.$$

Toliau galima lygybių nebetikrinti — dydžiai X ir Y yra priklausomi.

4a. Lentelė yra atsitiktinio dydžio X tikimybių skirstinys.

$m =$	1	2	3	4
$\mathbf{P}(X = m) =$	0,35	p	0,38	0,19

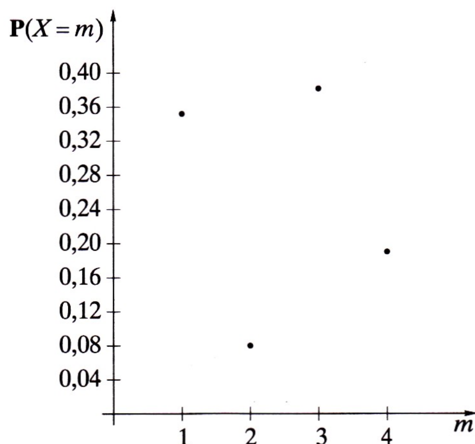
Raskite nežinomą tikimybę p. Pavaizduokite skirstinį grafiškai.

Visų atsitiktinio dydžio X reikšmių $x_1, \ldots, x_n$ tikimybių $\mathbf{P}(X = x_1), \ldots, \mathbf{P}(X = x_n)$ suma lygi 1, t. y.:

$$\mathbf{P}(X = x_1) + \cdots + \mathbf{P}(X = x_n) = 1.$$

$\mathbf{P}(X = 2) = p$ rasime iš lygybės:

$$0{,}35 + p + 0{,}38 + 0{,}19 = 1,$$
$$p = 1 - 0{,}92,$$
$$p = 0{,}08.$$

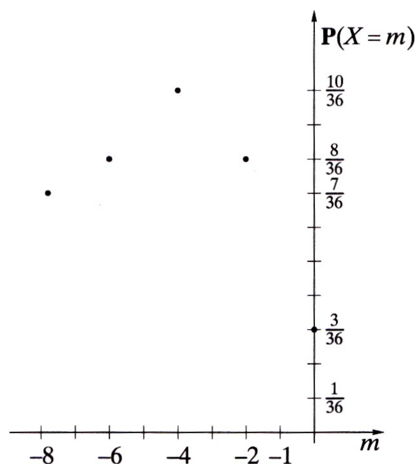


4b. Lentelė yra atsitiktinio dydžio X tikimybių skirstinys.

$m =$	−8	−6	−4	−2	0
$\mathbf{P}(X = m) =$	$\frac{7}{36}$	p	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{12}$

Raskite nežinomą tikimybę p. Pavaizduokite skirstinį grafiškai.

$$\mathbf{P}(X = -6) = p.$$
$$\frac{7}{36} + p + \frac{5}{18} + \frac{2}{9} + \frac{1}{12} = 1,$$
$$p = 1 - \frac{28}{36},$$
$$p = \frac{2}{9}.$$



5. Krepšininkas pataiko 75% baudos metimų. Nuo baudos metimų linijos jis ruošiasi mesti 6 kartus. Kokia tikimybė, kad krepšininkas pataikys:
a) lygiai 1 kartą? b) lygiai 3 kartus? c) visus kartus?

5a. Vienintelis taiklus metimas iš šešių gali būti bet kuris. Taiklų metimą pažymėkime 1, netaiklų — 0 ir surašykime visas galimas tokių metimų serijas:

1 0 0 0 0 0 — taiklus tik pirmasis metimas;
0 1 0 0 0 0 — taiklus tik antrasis metimas;
0 0 1 0 0 0 — taiklus tik trečiasis metimas;
0 0 0 1 0 0 — taiklus tik ketvirtasis metimas;
0 0 0 0 1 0 — taiklus tik penktasis metimas;
0 0 0 0 0 1 — taiklus tik šeštasis metimas.

Apskaičiuokime tikimybę, kad tik pirmasis metimas taiklus, t. y. tikimybę tokios metimų serijos:

1 0 0 0 0 0

Pirmiausiai pastebėkime, kad vieno metimo į krepšį rezultatas nedaro įtakos kito metimo rezultatui. Kitaip sakant, kiekvienas iš 6 metimų yra nepriklausomi.
Tikimybė, kad pirmasis (arba bet kuris kitas) metimas bus taiklus, lygi 75%, t. y. $0{,}75 = \frac{3}{4}$.

$$\mathbf{P}(1) = \frac{3}{4}.$$

Tikimybė, kad antrasis (arba bet kuris kitas) metimas bus netaiklus, lygi $100\% - 75\% = 25\%$, t. y. $0{,}25 = \frac{1}{4}$.

$$\mathbf{P}(0) = \frac{1}{4}.$$

Vadinasi, žinome visų 6 metimų tikimybes:

Metimo rezultatas	1	0	0	0	0	0
Tikimybė	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Tikimybė, kad įvyks įvykis „ir A, ir B, ir C, ...“ lygi įvykių A, B, C, ... tikimybių sandaugai (A, B, C — nepriklausomi įvykiai).

$$\mathbf{P}(\text{ir } A, \text{ir } B, \text{ir } C, \ldots) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(C) \cdot \ldots$$

Serijos 1 0 0 0 0 0 tikimybė

$$\mathbf{P}(\text{ir } 1, \text{ir } 0, \text{ir } 0, \text{ir } 0, \text{ir } 0, \text{ir } 0,) = \mathbf{P}(1) \cdot \mathbf{P}(0) \cdot \mathbf{P}(0) \cdot \mathbf{P}(0) \cdot \mathbf{P}(0) \cdot \mathbf{P}(0) =$$
$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{4^6}.$$

Bet serijų, kur vienintelis metimas taiklus, iš viso yra 6. Kiekvienos jų tikimybė lygi $\frac{3}{4^6}$ (tikimybės yra vienodos).
Ieškoma tikimybė lygi

$$6 \cdot \frac{3}{4^6} = \frac{6 \cdot 3}{4096} = \frac{9}{2048}.$$

Atsakymas. $\mathbf{P}(\text{Tik vienas metimas taiklus}) = \frac{9}{2048}$.

5b. Apskaičiuokime kurios nors vienos 6 metimų serijos, kur 3 metimai taiklūs, tikimybę, pavyzdžiui, serijos: 1 0 0 0 1 1 — taiklūs tik pirmas, penktas ir šeštas metimai.

$$\mathbf{P}(\text{ir } 1, \text{ir } 0, \text{ir } 0, \text{ir } 0, \text{ir } 1, \text{ir } 1) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3^3}{4^6}.$$

Dabar reikia suskaičiuoti, kiek tokių trijų taiklių metimų serijų yra iš viso, ir gautą tikimybę padauginti iš tų serijų skaičiaus.
Aišku, galima surašyti visas tokias serijas, nors tai ir nėra lengva:

1 1 1 0 0 0	1 1 0 1 0 0	1 0 1 0 1 0
0 1 1 1 0 0	1 1 0 0 1 0	1 0 1 0 0 1
0 0 1 1 1 0	1 1 0 0 0 1	1 0 0 1 0 1
0 0 0 1 1 1	0 1 1 0 1 0	0 1 0 1 0 1
	0 1 1 0 0 1	
	0 0 1 1 0 1	
	1 0 1 1 0 0	
	1 0 0 1 1 0	
	0 1 0 1 1 0	
	1 0 0 0 1 1	
	0 1 0 0 1 1	
	0 0 1 0 1 1	

Apskaičiuoti 3 taiklių metimų serijų skaičių galima ir taikant derinių formulę

$$C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

$$C_n^k = \frac{\overbrace{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}^{k}}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Taigi iš viso yra 20 tokių serijų, kurių kiekvienos tikimybė lygi $\frac{3^3}{4^6}$.

Vadinasi, kad lygiai 3 metimai iš 6 bus taiklūs, tikimybė yra

$$20 \cdot \frac{3^3}{4^6} = \frac{20 \cdot 27}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{135}{1024}.$$

Atsakymas. $\mathbf{P}(3 \text{ taiklūs}) = \frac{135}{1024}$.

5c. Kad visi metimai būtų taiklūs, yra viena serija: 1 1 1 1 1 1.

$$\mathbf{P}(\text{visi 6 taiklūs}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3^6}{4^6} = \frac{729}{4096}.$$

Atsakymas. $\mathbf{P}(6 \text{ taiklūs}) = \frac{729}{4096}$.

6. Lošimo kauliukas metamas penkis kartus. Stebimas įvykis, kad atvirs daugiau negu 4 akutės. Apskaičiuokite tikimybę, kad stebimas įvykis:
a) įvyks 1 kartą arba nė karto; b) įvyks ne mažiau negu 3 kartus.

Metant kauliuką gali atvirsti 1, 2, 3, 4, 5 arba 6 akutės — yra šešios baigtys.
Įvykiui „atvirs daugiau negu 4 akutės“ palankios dvi baigtys — atvirs 5 arba atvirs 6 akutės.

$$\mathbf{P}(\text{atvirs arba 5, arba 6 akutės}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = \mathbf{P}(A).$$

Tikimybė, kad atvirs mažiau kaip 5 akutės (įvykį „atvirs mažiau kaip 5 akutės“ pažymėkime B):

$$\mathbf{P}(\text{atvirs mažiau kaip 5}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = \mathbf{P}(B).$$

6a. Reikia apskaičiuoti:
1) tikimybę įvykio $\mathbf{P}(1 \text{ iš } 5)$ — vieną kartą iš penkių metimų atvirs 5 arba 6 akutės;
2) tikimybę įvykio $\mathbf{P}(0 \text{ iš } 5)$ — nė karto iš penkių metimų neatvirs 5 arba 6 akutės;
3) tikimybių $\mathbf{P}(1 \text{ iš } 5)$ ir $\mathbf{P}(0 \text{ iš } 5)$ sumą.
Apskaičiuokime $\mathbf{P}(1 \text{ iš } 5)$. Įvykti A gali bet kuriame iš 5 metimų:

$A\ B\ B\ B\ B$
$B\ A\ B\ B\ B$
$B\ B\ A\ B\ B$
$B\ B\ B\ A\ B$
$B\ B\ B\ B\ A$

Taigi iš viso yra penkios galimybės, kurių kiekvienos tikimybės yra vienodos.
Apskaičiuokime serijos $ABBBB$ tikimybę:

$$\mathbf{P}(\text{ir } A, \text{ir } B, \text{ir } B, \text{ir } B, \text{ir } B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(B) \cdot \mathbf{P}(B) =$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{243}.$$

Vadinasi, kad vieną kartą iš penkių metimų atvirs arba 5, arba 6 akutės, tikimybė lygi

$$5 \cdot \frac{16}{243} = \frac{80}{243}.$$

Apskaičiuokime tikimybę, kad nė karto iš 5 metimų neatvirs 5 arba 6 akutės. Tokia galimybė yra vienintelė:

$$B\ B\ B\ B\ B.$$

Jos tikimybė:

$$\mathbf{P}(\text{ir } B, \text{ir } B, \text{ir } B, \text{ir } B, \text{ir } B) = \mathbf{P}(B)\cdot\mathbf{P}(B)\cdot\mathbf{P}(B)\cdot\mathbf{P}(B)\cdot\mathbf{P}(B) = \\ = [\mathbf{P}(B)]^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}.$$

Ieškomoji tikimybė lygi tikimybių $\frac{80}{243}$ ir $\frac{32}{243}$ sumai:

$$\mathbf{P}(\text{metant kauliuką penkis kartus 5 arba 6 akutės atvirs vieną kartą arba neatvirs nė karto}) = \frac{80}{243} + \frac{32}{243} = \frac{112}{243}.$$

Atsakymas. $\frac{112}{243}$.

6b. Reikia rasti

$$\mathbf{P}(3 \text{ kartus}) + \mathbf{P}(4 \text{ kartus}) + \mathbf{P}(5 \text{ kartus}).$$

Tikimybė **P**(3 kartus):

$$C_5^3 \cdot \mathbf{P}(\text{ir } A, \text{ir } A, \text{ir } A, \text{ir } B, \text{ir } B) = \frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\right) = 10\cdot\frac{4}{243} = \frac{40}{243}.$$

Tikimybė **P**(4 kartus):

$$C_5^4 \cdot \mathbf{P}(A, A, A, A, B) = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right) = 5\cdot\frac{2}{243} = \frac{10}{243}.$$

Tikimybė **P**(5 kartus):

$$\mathbf{P}(A, A, A, A, A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{243}.$$

Vadinasi,

$$\mathbf{P}(3 \text{ kartus}) + \mathbf{P}(4 \text{ kartus}) + \mathbf{P}(5 \text{ kartus}) = \frac{40}{243} + \frac{10}{243} + \frac{1}{243} = \frac{51}{243}.$$

Atsakymas. $\frac{51}{243}$.

7a. Loterijai atspausdinta 1000 bilietų, iš kurių 200 bilietų laimi po 1 Lt, 100 — po 5 Lt, 50 — po 10 Lt, 10 — po 50 Lt, kiti bilietai nelaimi nieko. Atsitiktinis dydis X — vieno bilieto laimėjimo dydis. Raskite atsitiktinio dydžio X skirstinį. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X matematinę viltį ir dispersiją.

Atsitiktinis dydis X gali įgyti 5 skirtingas reikšmes:

$$X = \{0;\ 1;\ 5;\ 10;\ 50\}.$$

Apskaičiuojame tų reikšmių tikimybes:
$\mathbf{P}(X=1)=\frac{200}{1000}=\frac{1}{5}$;
$\mathbf{P}(X=5)=\frac{100}{1000}=\frac{1}{10}$;
$\mathbf{P}(X=10)=\frac{50}{1000}=\frac{1}{20}$;
$\mathbf{P}(X=50)=\frac{10}{1000}=\frac{1}{100}$;
$\mathbf{P}(X=0)=\frac{1000-200-100-50-10}{1000}=\frac{640}{1000}=\frac{16}{25}$.

Atsitiktinio dydžio X skirstinys:

$m=$	0	1	5	10	50
$\mathbf{P}(X=m)=$	$\frac{16}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{100}$

Apskaičiuokime atsitiktinio dydžio X matematinę viltį.

Tegu atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes

$$x_1, x_2, \dots, x_k$$

su tikimybėmis

$$p_1, p_2, \dots, p_k.$$

Atsitiktinio dydžio X matematine viltimi $\mathbf{E}X$ (arba vidurkiu $\mathbf{M}X$) vadiname skaičių

$$\mathbf{E}X = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_k \cdot p_k = \mathbf{M}X.$$

$$\mathbf{E}X = 0 \cdot \frac{16}{25} + 1 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot \frac{1}{10} + 10 \cdot \frac{1}{20} + 50 \cdot \frac{1}{100} = 0 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{17}{10} = 1{,}7.$$

Apskaičiuokime X dispersiją.

Tegu atsitiktinis dydis X įgyja reikšmes

$$x_1, x_2, \dots, x_k$$

su tikimybėmis

$$p_1, p_2, \dots, p_k.$$

Atsitiktinio dydžio X dispersija vadiname skaičių

$$\mathbf{D}X = (x_1 - \mathbf{E}X)^2 \cdot p_1 + (x_2 - \mathbf{E}X)^2 \cdot p_2 + \dots + (x_k - \mathbf{E}X)^2 \cdot p_k;$$

čia $\mathbf{E}X = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \dots + x_k \cdot p_k$.

$$\mathbf{D}X = (0-1{,}7)^2 \cdot \frac{16}{25} + (1-1{,}7)^2 \cdot \frac{1}{5} + (5-1{,}7)^2 \cdot \frac{1}{10} + (10-1{,}7)^2 \cdot \frac{1}{20} + $$
$$+ (50-1{,}7)^2 \cdot \frac{1}{100} =$$
$$= 2{,}89 \cdot 0{,}64 + 0{,}49 \cdot 0{,}2 + 10{,}89 \cdot 0{,}1 + 68{,}89 \cdot 0{,}05 + 2332{,}89 \cdot 0{,}01 =$$
$$= 1{,}8496 + 0{,}098 + 1{,}089 + 3{,}4445 + 23{,}3289 =$$
$$= 29{,}81.$$

7b. Medžiotojas turi 4 šovinius. Tikimybė medžiotojui vienu šūviu pataikyti į bėgantį kiškį lygi $\frac{1}{4}$. Atsitiktinis dydis X — šūvių į kiškį iki pirmo pataikymo arba kol pasibaigs šoviniai skaičius. Apskaičiuokite atsitiktinio dydžio X vidurkį ir standartinį nuokrypį.

> Atsitiktinio dydžio X:
> - Vidurkis = Matematinė viltis;
> - Standartinis nuokrypis = $\sqrt{\text{Dispersija}}$: $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{D}X}$.

Atsitiktinis dydis X gali įgyti keturias reikšmes:

$$X = \{1; 2; 3; 4\},$$

t. y. medžiotojas galėjo iššauti:
vieną kartą — pirmas šūvis taiklus;
du kartus — antras šūvis taiklus;
tris kartus — trečias šūvis taiklus;
keturis kartus — pirmieji 3 šūviai buvo netaiklūs (o ketvirtas gal taiklus, o gal ir ne).
Apskaičiuokime atsitiktinio dydžio X reikšmių tikimybes:

$$\mathbf{P}(X=1) = \frac{1}{4};$$

$$\mathbf{P}(X=2) = \mathbf{P}(\text{pirmas šūvis netaiklus}) \cdot \mathbf{P}(\text{antras šūvis taiklus}) =$$
$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{16};$$

$$\mathbf{P}(X=3) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{64};$$

$$\mathbf{P}(X=4) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{64}.$$

Atsitiktinio dydžio X skirstinys:

$m =$	1	2	3	4
$\mathbf{P}(X=m) =$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$

Atsitiktinio dydžio X vidurkis:

$$\mathbf{M}X = 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{3}{16} + 3 \cdot \frac{9}{64} + 4 \cdot \frac{27}{64} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{27}{64} + \frac{108}{64} = \frac{175}{64} = 2\frac{47}{64}.$$

Atsitiktinio dydžio X standartinis nuokrypis:

$$\sqrt{\mathbf{D}X} = \sqrt{\left(1-2\frac{47}{64}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(2-2\frac{47}{64}\right)^2 \cdot \frac{3}{16} + \left(3-2\frac{47}{64}\right)^2 \cdot \frac{9}{64} + \left(4-2\frac{47}{64}\right)^2 \cdot \frac{27}{64}} =$$

$$= \sqrt{\left(1\frac{47}{64}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{47}{64}\right)^2 \cdot \frac{3}{16} + \left(\frac{17}{64}\right)^2 \cdot \frac{9}{64} + \left(1\frac{17}{64}\right)^2 \cdot \frac{27}{64}} =$$

$$= \sqrt{\frac{111^2}{64^2 \cdot 4} + \frac{47^2 \cdot 3}{64^2 \cdot 16} + \frac{17^2 \cdot 9}{64^2 \cdot 64} + \frac{81^2 \cdot 27}{64^2 \cdot 64}} =$$

$$= \frac{1}{64 \cdot 2}\sqrt{111^2 + \frac{47^2 \cdot 3}{4} + \frac{17^2 \cdot 9}{16} + \frac{81^2 \cdot 27}{16}} =$$

$$= \frac{1}{128} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{111^2 \cdot 16 + 47^2 \cdot 3 \cdot 4 + 17^2 \cdot 9 + 81^2 \cdot 27} =$$

$$= \frac{1}{512}\sqrt{197\,136 + 26\,508 + 2601 + 177\,147} =$$

$$= \frac{1}{512}\sqrt{403\,392} =$$

$$= \frac{1}{512}\sqrt{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6303} = \frac{4 \cdot 2}{512}\sqrt{6303} \approx$$

$$\approx \frac{1}{64} \cdot 79{,}39143531 \approx 1{,}24.$$

Atsakymas. $\mathbf{M}X \approx 2{,}73$, $\delta(X) \approx 1{,}24$.

7c. Lošimo kauliuku lošiama taip: jei metus kauliuką atvirto mažiau kaip 4 akutės, tai šis akučių skaičius ir yra lošimo rezultatas, jei atvirto daugiau kaip 3 akutės, tai metame dar kartą, o lošimo rezultatas — abiejuose metimuose atvirtusių akučių suma. Kokia atsitiktinio dydžio X, reiškiančio lošimo rezultatą, matematinė viltis?

Surašykime atsitiktinio dydžio X galimas įgyti reikšmes.
Jei pirmu metimu atsivertė mažiau kaip 4 akutės, tai galimos tokios X reikšmės:

1 — atsivertė 1 akutė;
2 — atsivertė 2 akutės;
3 — atsivertė 3 akutės.

Jei pirmu metimu atsivertė daugiau negu 3 akutės, t. y. 4, 5 arba 6 akutės, tai kiekvienu atveju metame kauliuką dar kartą ir skaičiuojame abiejų metimų akučių sumas.
Jei pirmu metimu atvirto 4 akutės, tai X gali įgyti tokias reikšmes

$$4+1=5, \quad 4+2=6, \quad 4+3=7, \quad 4+4=8, \quad 4+5=9, \quad 4+6=10.$$

Jei pirmu metimu atvirto 5 akutės, tai galimos X reikšmės yra: 6, 7, 8, 9, 10, 11.
Jei pirmu metimu atvirto 6 akutės, tai galimos X reikšmės yra: 7, 8, 9, 10, 11, 12.
Vadinasi, atsitiktinis dydis X gali įgyti tokias reikšmes:

$$X = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}.$$

Reikia apskaičiuoti kiekvienos X reikšmės tikimybę.

$$\mathbf{P}(X=1)=\frac{1}{6},\quad \mathbf{P}(X=2)=\frac{1}{6},\quad \mathbf{P}(X=3)=\frac{1}{6};$$

$$\mathbf{P}(X=5)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36};$$

$$\mathbf{P}(X=6)=2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{36};$$

$$\mathbf{P}(X=7)=\frac{3}{36};$$

$$\mathbf{P}(X=8)=\frac{3}{36};$$

$$\mathbf{P}(X=9)=\frac{3}{36};$$

$$\mathbf{P}(X=10)=\frac{3}{36};$$

$$\mathbf{P}(X=11)=\frac{2}{36};$$

$$\mathbf{P}(X=12)=\frac{1}{36}.$$

Pasitikriname, ar visų tikimybių suma lygi 1:

$$\frac{3}{6}+2\cdot\frac{1}{36}+2\cdot\frac{2}{36}+4\cdot\frac{3}{36}=1.$$

Apskaičiuojame X matematinę viltį:

$$\mathbf{E}X=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{36}+6\cdot\frac{2}{36}+7\cdot\frac{3}{36}+8\cdot\frac{3}{36}+9\cdot\frac{3}{36}+$$
$$+10\cdot\frac{3}{36}+11\cdot\frac{2}{36}+12\cdot\frac{1}{36}=$$
$$=\frac{1}{6}(1+2+3)+\frac{1}{36}(3+5+12+21+24+27+30+22+12)=\frac{1}{6}\cdot 6+\frac{1}{36}\cdot 156=$$
$$=1+\frac{13}{3}=5\frac{1}{3}.$$

8. Iš nelygybės

$$3^{\frac{x^2-4x+3}{x^2-11x+24}}<1$$

sveikųjų sprendinių atsitiktinai parenkamas vienas skaičius. Kokia tikimybė, kad pasirinktas skaičius yra dalus iš dviejų?

Pirmiausia reikia nustatyti nelygybės sveikųjų sprendinių skaičių.

Sveikieji skaičiai: ..., −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, ...

Išsprendžiame rodiklinę nelygybę.

$a^{f(x)} < a^{g(x)}$ — rodiklinė nelygybė (nežinomasis yra laipsnio rodiklyje).

Jei $a > 1$, tai nelygybė $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ ekvivalenti nelygybei $f(x) < g(x)$.

Jei $a < 1$, tai nelygybė $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ ekvivalenti nelygybei $f(x) > g(x)$.

$$3^{\frac{x^2-4x+3}{x^2-11x+24}} < 3^0.$$

Kadangi $3 > 1$, tai sprendžiame nelygybę:

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2-11x+24} < 0.$$

Skaitiklį ir vardiklį skaidome dauginamaisiais.

$$x^2-4x+3=0, \quad D=4, \quad x_1=3, \quad x_2=1;$$
$$x^2-4x+3=(x-3)(x-1).$$
$$x^2-11x+24=0, \quad D=25, \quad x_1=3, \quad x_2=8;$$
$$x^2-11x+24=(x-3)(x-8).$$

Turime:

$$\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x-8)} < 0.$$

Čia galima trupmeną suprastinti iš $(x-3)$. Bet nereikia pamiršti, kad reikšmė $x = 3$ nėra nelygybės sprendinys.
Nustatome trupmenos ženklus intervaluose, į kuriuos realiuosius skaičius sudalijo skaičiai 1, 3, 8:

+ − − +
1 3 8 x $\quad x \in (1; 3) \cup (3; 8)$

Sveikieji nelygybės sprendiniai yra penki:

2, 4, 5, 6, 7.

Iš dviejų dalijasi trys sprendiniai:

2, 4, 6.

Vadinasi, ieškomoji tikimybė

$$\mathbf{P} = \frac{3}{5}.$$

K1. RIBOS

1 variantas

1. a) $13\frac{2}{3}$; b) $2\frac{1}{4}$; c) $\frac{1}{6}$.

2. Funkcija tolydi intervaluose:

a) $(-\infty; 1)$ ir $(1; +\infty)$; b) $[-2; 2]$; c) $\left(2-\sqrt{2}; 1\right]$ ir $\left[3; 2+\sqrt{2}\right)$.

3. $\Delta f(0) = -\frac{1}{10}$, kai $\Delta x = 0{,}3$.

4. $f(-2) = 1$, $f\left(\frac{x}{3} - 1\right) = \frac{x^4}{81}$.

6. a) $f(2) = 3$, $g(2) = 4$, $f(1)$ — neapibrėžta, $g(1) = 2$;

b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 4$;

c) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$ — neegzistuoja.

7. a) $x \in (-\infty; -3] \cup \left(-2\frac{1}{2}; 1\right] \cup \left[3\frac{1}{2}; +\infty\right)$;

b) $x \in (-3; -1) \cup (-1; 2)$;

c) $x \in (-4; -3) \cup [-2{,}5; -2)$;

d) $x \in (-\infty; -4)$.

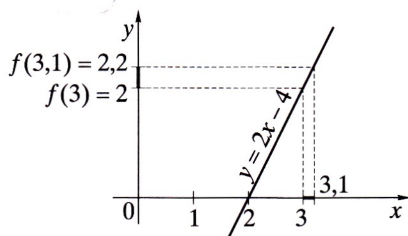
2 variantas

1. a) 41; b) $2\frac{1}{6}$; c) -42.

2. Funkcija tolydi intervaluose:

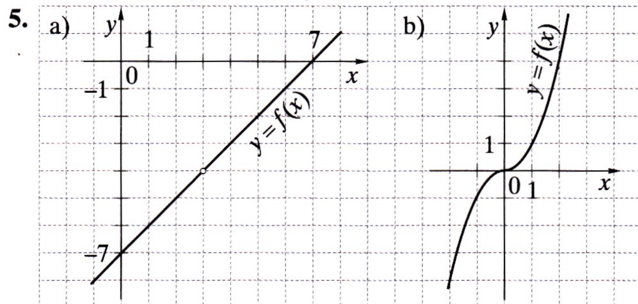
a) $(-\infty; +\infty)$; b) $\left[-1\frac{1}{2}; 3\right]$; c) $\left(-\sqrt{11}; -\sqrt{7}\right]$ ir $\left[\sqrt{7}; \sqrt{11}\right)$.

3. $\Delta f(3) = 0{,}2$, kai $\Delta x = 0{,}1$.



4. $f(2) = 1$, $f\left(\frac{x}{2} + 1\right) = \frac{x^3}{8}$.

5.



6. a) $g(1) = 3$, $h(1) = 3$, $g(2)$ — neapibrėžta, $h(2) = 5$;

b) $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 3$, $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = 3$;

c) $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 4$, $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$ — neegzistuoja.

7. a) $x \in [-4; -1{,}5) \cup [4{,}5; 6)$;

b) $x \in (-4; -2) \cup (-2; 2) \cup (4; 7)$;

c) $x \in (2; 2{,}5) \cup (3; 4)$;

d) $x \in (2; 3)$.

K2. IŠVESTINĖS

1 variantas

1. 1) a) $f'(2) = 2$, $f'(0) = 2$; b) $f'(2) = 25$, $f'(0) = -3$;
2) a) $f'(x) = 2$; b) $f'(x) = 14x - 3$.
2. a) $f'(x) = 70x^6 + 48x^5 - 2x^2 + 6$; b) $f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{6}{x^3} + \frac{1}{9}$;
c) $f'(x) = \frac{4}{5\sqrt[5]{x}} + \frac{5}{2}x\sqrt{x} + 16x\sqrt[3]{x^2}$.
3. 3; 4.
4. a) Liestinės lygtis $y = -4x - 8$, trikampio plotas 8; b) $y = x$.
5. a) $(-1; 2)$, $(1; 2)$.
6. a) 12; b) $\left(-\frac{1}{9\sqrt[4]{3}}; -\frac{1}{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[12]{3}}\right)$, $\left(\frac{1}{9\sqrt[4]{3}}; \frac{1}{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[12]{3}}\right)$.
7. 1) $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 8$; 2) $t = 1$ s ir $t = 8$ s; 3) $t = 4{,}5$ s; 4) $a_1 = 2\,\text{cm/s}^2$, $a_2 = 4\,\text{cm/s}^2$.

2 variantas

1. 1) a) $f'(1) = f'(2) = -2$; b) $f'(1) = -6$, $f'(2) = -14$;
2) a) $f'(x) = -2$; b) $f'(x) = 2 - 8x$.
2. a) $f'(x) = 54x^5 + 35x^4 - 2x^3 + 5$; b) $f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{4}{x^3} + \frac{1}{6}$; c) $f'(x) = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}} + \frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{40}{3}x\sqrt[3]{x^2}$.
3. 1; 5.
4. a) Liestinės lygtis $y = 6x - 14$, trikampio plotas $S = 18\frac{2}{3}$; b) $y = -4x - 3$.
5. a) $(1; 0)$, $(-1; -4)$.
6. a) 2; b) $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{27}}; \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{27}}; -\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)$.
7. 1) $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 6$; 2) $t = 1$ s, $t = 6$ s; 3) $t = 3{,}5$ s; 4) $a_1 = 2\,\text{cm/s}^2$, $a_2 = 4\,\text{cm/s}^2$.

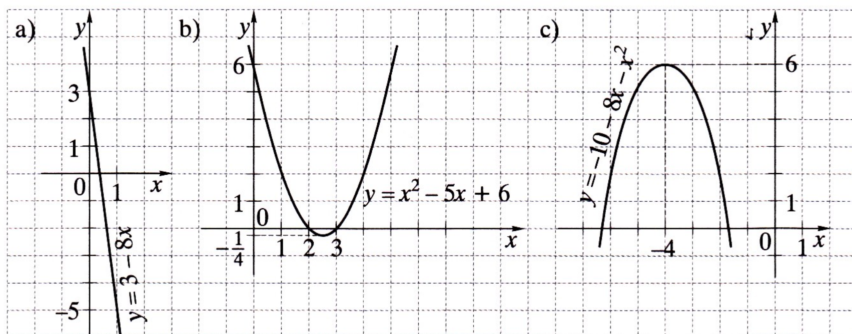
K3. IŠVESTINIŲ TAIKYMAS FUNKCIJOMS TIRTI

1 variantas

1. a) $x \in (-3; 2)$; b) $x \in (-4; -2) \cup (4; 5]$; c) $x = -3$, $x = 2$; d) $x = -4$, $x = -2$, $x = 4$.
2. a) Funkcija yra mažėjanti, kai $x \in (-\infty; +\infty)$;
b) reikšmės didėja, kai $x \in (2; +\infty)$; mažėja, kai $x \in (-\infty; 2)$;
c) reikšmės didėja, kai $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$; mažėja, kai $x \in \left(-\frac{3}{2}; +\infty\right)$.
3. b) $a \in [-1; 1]$.
4. a) $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ — minimumo taškas, $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ — maksimumo taškas;
b) $x = -2$ ir $x = 2$ — minimumo taškai;
c) $x = -5$ ir $x = 0$ — maksimumo taškai, $x = -2$ — minimumo taškas.
5. a) $\min\limits_{x=2} f(x) = -4{,}5$; b) $\min\limits_{x=1} f(x) = -2\frac{1}{3}$; $\max\limits_{x=5} f(x) = 8\frac{1}{3}$;
c) $\min\limits_{x=0} f(x) = 3$; $\max\limits_{x=-\sqrt{2}} f(x) = \max\limits_{x=\sqrt{2}} f(x) = 4$.
6. a) $2\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{6}$; c) 2.
7. a) $-x + 4$; b) $m - 2$; c) $p + q - 2\sqrt{pq}$.

2 variantas

1. a) $x \in (-4; -2) \cup (2; 4)$; b) $x \in (1; 3) \cup (5; 7]$; c) $x = -2$, $x = 2$, $x = 4$;
d) $x = 1$, $x = 3$, $x = 5$.
2. a) Funkcijos reikšmės mažėja, kai $x \in (-\infty; +\infty)$;
b) reikšmės didėja, kai $x \in (2{,}5; +\infty)$; mažėja, kai $x \in (-\infty; 2{,}5)$;
c) reikšmės didėja, kai $x \in (-\infty; -4)$; mažėja, kai $x \in (-4; +\infty)$.



3. b) $a \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

4. a) $x = -\sqrt{3}$ — maksimumo taškas, $x = \sqrt{3}$ — minimumo taškas;

b) $x = -\sqrt{6}$ ir $x = \sqrt{6}$ — minimumo taškai;

c) $x = 0$ — nėra ekstremumo taškas, $x = \frac{27}{64}$ — minimumo taškas.

5. a) $\min\limits_{x=2} f(x) = 2$; b) $\min\limits_{x=2} f(x) = -10\frac{2}{3}$; $\max\limits_{x=6} f(x) = 0$;

c) $\max\limits_{x=-\sqrt{7}} f(x) = \max\limits_{x=\sqrt{7}} f(x) = 13{,}25$; $\min\limits_{x=0} f(x) = 1$.

6. a) -12; b) $\frac{7}{16}$; c) $101\frac{1}{12}$.

7. a) x; b) $\left(\frac{a}{b}\right)^n$; c) $2\sqrt{a}$.

K4. FUNKCIJŲ IŠVESTINIŲ SKAIČIAVIMO TAISYKLĖS

1 variantas

1. a) $-\frac{4}{9}$; b) $\frac{5}{2}$; c) $-\frac{3\left(1+\frac{a}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^4}$.

2. a) $f(g(x)) = \sqrt{2x^3 - 3x^2 + 7}$, $g(f(x)) = 2x\sqrt{x} - 3x + 7$;

b) $f(g(x)) = \sqrt[4]{x^3 + 3x}$, $g(f(x)) = \sqrt[4]{x^3} + 3\sqrt[4]{x}$;

c) $f(g(x)) = \left(x^2 + x\sqrt[5]{x}\right)^7$, $g(f(x)) = x^{14} + x^8\sqrt[5]{x^2}$.

3. a) $2x$; b) $-\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$; c) $\frac{x-1}{4x\sqrt{x}}$.

4. 1) Po 2,5 s; 2) $v(t) = \frac{4t}{25-4t^2}$; 3) $s(2) = 2$ m, $v(2) = 2\frac{2}{3}$ m/s.

5. a) $(0; -1)$, $(-2; 3)$; b) $(-1; 1)$; c) $(4; 0)$, $(1; -27)$.

6. a) $3\frac{1}{3}$; b) $\frac{3}{2}$; c) 2.

2 variantas

1. a) $-\frac{3}{100}$; b) 2; c) $-42\frac{2}{3}$.

2. a) $f(g(x)) = \sqrt{3x^3 + 2x^2 - 12}$, $g(f(x)) = 3x\sqrt{x} + 2x - 12$;

b) $f(g(x)) = \sqrt[3]{3x^2 - 6x}$, $g(f(x)) = 3\sqrt[3]{x^2} - 6\sqrt[3]{x}$;

c) $f(g(x)) = \left(x^3 - x\sqrt[6]{x}\right)^9$, $g(f(x)) = x^{27} - x^{10}\sqrt{x}$.

3. a) $2x$; b) $\frac{x+1}{x\sqrt{x}}$; c) $\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$.

4. $8\frac{14}{17}$ m/min.

5. a) $(2; 0)$, $(-6; 2)$; b) $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$; c) $(0; 0)$, $(2; 0)$, $(1; 1)$.

6. a) $1\frac{3}{11}$; b) 1,5; c) 0; 3.

K5. TRIGONOMETRINIŲ FUNKCIJŲ IŠVESTINĖS

1 variantas

2. a) $5\cos(5x) - \sin x$; b) $-3\sin(6x)$; c) $-\frac{2}{\cos^2(1-2x)} - \frac{1}{\sin^2 x}$;
d) $2x\cos\left(2x^2\right) - 4x^3\sin\left(2x^2\right)$; e) $\frac{6\cos\left(\frac{x}{4}\right)+\frac{3}{2}x\sin\left(\frac{x}{4}\right)}{4\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)}$;
f) $3x^2\operatorname{tg}\left(2\sqrt{x}\right) + \frac{x^3}{\sqrt{x}\cos^2\left(2\sqrt{x}\right)} = 3x^2\operatorname{tg}(2\sqrt{x}) + \frac{x^2\sqrt{x}}{\cos^2(2\sqrt{x})}$.
3. a) $(\pi + 2\pi k; 0)$, $k \in \boldsymbol{Z}$; b) $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
c) $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $n, k \in \boldsymbol{Z}$.
5. a) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; b) $x = \pi k$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$; $k, n \in \boldsymbol{Z}$;
c) $x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} - \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
6. a) 45; b) $-\frac{\pi}{2}$; c) $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3}$.
7. b) $x = \pi n$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi l$; $n, k, l \in \boldsymbol{Z}$.

2 variantas

1. a) $f'(x) = -\sin x$, $g'(x) = -5\sin(5x)$, $h'(x) = -5\sin x$, $l'(x) = -\sin x$,
$m'(x) = -\sin(x+5)$, $t'(x) = -5\cos^4 x \sin x$,
$n'(x) = -625\cos^4(5x+5)^5 \cdot \sin(5x+5)^5 \cdot (5x+5)^4$;
b) $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $g'(x) = -\frac{1}{\cos^2(5\pi - x)}$, $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}\cdot\cos^2(\sqrt{x}-\pi)}$,
$l'(x) = \frac{49\operatorname{tg}^6\left(5x^7-3x\right)}{\cos^2\left(5x^7-3x\right)} \cdot \left(35x^6 - 3\right) + 2$;
c) $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $g'(x) = \frac{3-10x}{\sin^2\left(5x^2-3x+\pi\right)}$, $h'(x) = -\frac{1}{6\sqrt{\operatorname{ctg}\sqrt[3]{x}}\cdot\sin^2\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}}$.
2. a) $-4\sin(4x)$; b) $9\sin^2(3x)\cos(3x) = 4{,}5\sin(6x)\sin(3x)$; c) $\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{3}{\sin^2(1-3x)}$;
d) $4x^3\cos\left(5x^2\right) - 10x^5\sin\left(5x^2\right)$; e) $\frac{4\sin\left(\frac{x}{6}\right)-\frac{2}{3}x\cos\left(\frac{x}{6}\right)}{3\sin^2\left(\frac{x}{6}\right)}$; f) $2x\operatorname{ctg}\left(3\sqrt{x}\right) - \frac{3x^2}{2\sqrt{x}\sin^2(3\sqrt{x})}$.
3. a) $(-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; b) $(2\pi n; 0)$, $n \in \boldsymbol{Z}$;
c) $x = \pi + 2\pi n$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$; $n, k \in \boldsymbol{Z}$.
5. a) $x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; b) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$; $n, k \in \boldsymbol{Z}$;
c) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.
6. a) 0; b) $-\frac{3\pi}{2}$; c) $1\frac{5}{6}$.
7. b) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k$, $x = (-1)^l \cdot \frac{\pi}{6} + \pi l$; $n, k, l \in \boldsymbol{Z}$.

K6. RODIKLINĖS, LOGARITMINĖS IR LAIPSNINĖS FUNKCIJŲ IŠVESTINĖS

1 variantas

1. a) $-4\,e^{3-4x}$; b) $2\,e^{\frac{x}{2}} - 3\,e^{3x}$; c) $-\frac{2\pi}{x^3} + \frac{5}{4}\sqrt[4]{x} + \ln 2 \cdot 2^x$; d) $2x \cdot 3^{-x} - \ln 3 \cdot x^2 \cdot 3^{-x}$; e) $\frac{\lg x - \frac{1}{\ln 10}}{\lg^2 x}$;
f) $\frac{2x-3}{(x^2-3x)\cdot\ln 0{,}3}$.
2. a) $-\frac{7}{3}$; 0; b) 3; c) $x \in (3; +\infty)$.
3. a) $6\frac{1}{8}$; b) $\frac{1}{3\ln 10} = \frac{1}{3}\lg e$; c) $\frac{1}{3}$.
4. a) $D(f) = (1; 6)$; b) $3\frac{1}{2}$; c) reikšmės didėja, kai $x \in (1; 3{,}5)$; mažėja, kai $x \in (3{,}5; 6)$;
d) $x = 3{,}5$.
5. a) $y = 3\ln 3 \cdot x - 3\ln 3 + 3$; b) $y = x + 1$; c) $y = 3x - 3$.
6. a) Reikšmės didėja, kai $x \in (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$; mažėja, kai $x \in (-2; 0)$;
b) reikšmės didėja, kai $x \in \left(\sqrt[3]{e}; +\infty\right)$; mažėja, kai $x \in (0; 1) \cup \left(1; \sqrt[3]{e}\right)$;
c) reikšmės didėja, kai $x \in \left(\frac{27}{64}; +\infty\right)$; mažėja, kai $x \in \left(-\infty; \frac{27}{64}\right)$. **7.** Per 12 minučių.

2 variantas

1. a) $-3\,e^{-3x}$; b) $\frac{1}{2}\,e^{\frac{x}{2}}-33\,e^{11x}$; c) $5^x\ln 5-\frac{10}{x^3}-\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$; d) $x^3\cdot 0{,}7^{-x}(4-x\ln 0{,}7)$; e) $\frac{1-\lg x\ln 10}{\ln 10\cdot x^2}$; f) $-\frac{3}{(4-3x)\ln 0{,}3}$.

2. a) $x=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$; b) $x=13$; c) $x\in\left(\frac{1}{3};3\right)$.

3. a) $-\frac{1}{196}$; b) $\frac{1}{\ln 10}$; c) $\frac{1}{4}$.

4. a) $D(f)=(-\infty;2)\cup(3;+\infty)$; b) kritinių taškų nėra; c) reikšmės didėja, kai $x\in(3;+\infty)$; mažėja, kai $x\in(-\infty;2)$; d) ekstremumo taškų nėra.

5. a) $y=x\ln\frac{1}{2}+1$; b) $y=ex$; c) $y=2x-4$.

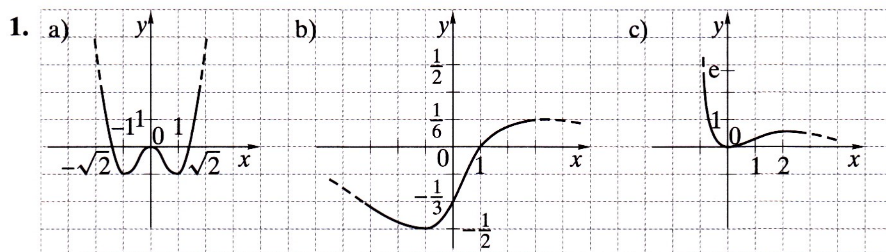
6. a) Reikšmės didėja, kai $x\in(-3;0)\cup(0;+\infty)$; mažėja, kai $x\in(-\infty;-3)$;
b) reikšmės didėja, kai $x\in(0;\sqrt{e})$; mažėja, kai $x\in(\sqrt{e};+\infty)$;
c) reikšmės didėja, kai $x\in\left(-\frac{1}{27};+\infty\right)$; mažėja, kai $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{27}\right)$.

7. Pirmuoju per 18 h, antruoju per 12 h.

K7. FUNKCIJŲ IŠVESTINIŲ TAIKYMAI

1 variantas

1.



2. a) $\max\limits_{[-1;7]} f(-1)=16$, $\min\limits_{[-1;7]} f(4)=-9$; b) $\max\limits_{[1;e]} f(e)=e^2$, $\min\limits_{[1;e]} f(1)=0$;
c) $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} f(0)=\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}$, $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} f\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{3}{4}$.

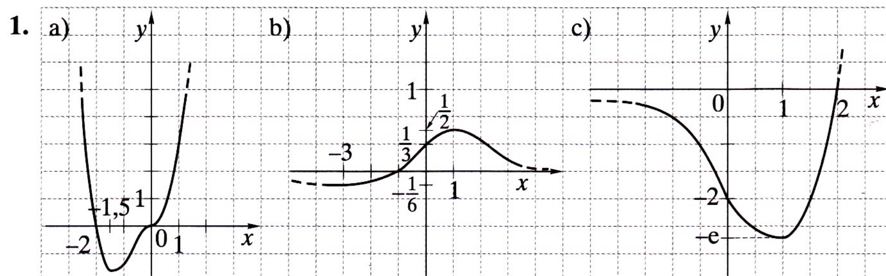
3. a) $12=6+6$; b) 2) $x=8$; c) $10\sqrt{2}$ cm, $10\sqrt{2}$ cm, 20 cm.

4. $E(f)=\left[-240;\frac{1}{4}\right]$.

5. 2) $B\left(\frac{6}{17};\frac{7}{17}\right)$.

2 variantas

1.



2. a) $\max\limits_{[-1;5]} f(-1)=12$, $\min\limits_{[-1;5]} f(3)=-4$; b) $\max\limits_{[1;e]} f(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$, $\min\limits_{[1;e]} f(1)=0$;
c) $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{4}$, $\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} f(0)=\min\limits_{\left[0;\frac{\pi}{2}\right]} f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

3. a) $10=5+5$; b) 20 m ir 40 m; c) $\frac{\pi}{3}$.

4. $E(f)=[-9;23]$.

5. 2) $(0{,}9;0{,}7)$.

K8. PIRMYKŠTĖS FUNKCIJOS IR NEAPIBRĖŽTINIAI INTEGRALAI

1 variantas

1. a) $f(x) = -\frac{3}{\sin^2 x} + 1$; b) $f(x) = 8x^7$; c) $f(x) = \frac{2}{x} - e^x$.

2. a) $F(x) = -\frac{7}{2}x^2 + 4x + C$; b) $F(x) = -\frac{1}{4x^4} - \frac{1}{x} + C$; c) $F(x) = 4\sqrt[5]{x} + C$;
d) $F(x) = -\frac{1}{6(2x+3)^3} + C$; e) $F(x) = e^x + \frac{1}{8} \cdot 3\ln|8x-1| + C$; f) $F(x) = 5x + \frac{1}{7}\cos(7x) + C$.

3. a) $F(x) = \sqrt{2x+1} + 2$; b) $F(x) = 3^x - 2$; c) $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}$.

4. a) $\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x + C$; b) $\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + C$; c) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}(3x+1) + C$.

5. a) $F(x) = \frac{(2x-7)^{22}}{44} - \frac{1}{44}$; b) $F(x) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}x+3\right)^2} + 4$; c) $F(x) = -\frac{3}{4}\cos\left(\frac{2x}{3}\right) + \frac{13}{12}$.

6. a) $F(x) = \frac{5}{2}x^2 + 15x + 22\frac{1}{2}$; b) $F(x) = 2x^2 + \frac{3}{2}$; c) $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

2 variantas

1. a) $f(x) = 7x^6$; b) $f(x) = \frac{2}{\cos^2 x} - 1$; c) $f(x) = 2e^{2x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2. a) $F(x) = x^2 - x + C$; b) $F(x) = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{5x^5} + C$; c) $F(x) = \frac{1}{8}\sin(8x) - 3x + C$;
d) $F(x) = -\frac{3}{5(5x-7)^2} + C$; e) $F(x) = 2\sqrt[3]{x} + C$; f) $F(x) = \frac{7}{9}\ln|9x-2| - e^x + C$.

3. a) $F(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{1-3x} + 1\frac{1}{3}$; b) $F(x) = 2^x + 1$; c) $F(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x} + \frac{1}{4}$.

4. a) $\frac{5x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 6x + C$; b) $\frac{5x\sqrt[5]{x^3}}{8} + C$; c) $-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}(5x-2) + C$.

5. a) $F(x) = -\frac{3\left(5-\frac{1}{3}x\right)^5}{5} + 20$; b) $F(x) = -\frac{(2-10x)\sqrt{1-5x}}{15} + \frac{1}{6}$; c) $F(x) = \frac{1}{4}\sin(4x) + \frac{3}{4}$.

6. a) $F(x) = \frac{3x^2}{2} - 6x + 6$; b) $F(x) = x^2 + \frac{9}{4}$; c) $f(x) = 2x^2 + 5x + 3$.

K9. APIBRĖŽTINIAI INTEGRALAI

1 variantas

1. a) 6; b) 31; c) −1; d) $\frac{1+e^2}{2}$.

2. a) $a = 1$; b) $a = \frac{1}{2}$.

3. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}$.

4. a) $10\frac{2}{3}$ kv. v.; b) 17 kv. v.; c) $2\frac{2}{3}$ kv. v.; d) $12 - 5\ln 5$ kv. v.; e) 2 kv. v.

5. 1) $F(x) = x^2 + 4x + C$; 2) $F_1(x) = x^2 + 4x + 4$; c) $2\frac{1}{4}$ kv. v.

6. $7\frac{1}{3}$ kv. v.

7. 1200 m.

8. $y = -12x^2 + 12x$.

9. a) $5\frac{8}{15}\pi$ kub. v.; b) $40\frac{1}{2}\pi$ kub. v.; c) $\frac{\pi^2}{4}$ kub. v..

2 variantas

1. a) $\frac{1}{3}$; b) 3; c) $\frac{1}{4}$; d) e.

2. a) $a = 1$; b) $a = 4$.

3. $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \alpha = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k;\ n, k \in \boldsymbol{Z}$.

4. a) $\frac{1}{6}$ kv. v.; b) $37\frac{1}{3}$ kv. v.; c) $20\frac{5}{6}$ kv. v.; d) $6 - 2\ln 3$ kv. v.; e) 2 kv. v.

5. 1) $F(x) = x^2 - 2x + C$; 2) $F(x) = x^2 - 2x + 1$; 3) $\frac{2}{3}$ kv. v.

6. 36 kv. v.

7. 60,9 m.

8. $y = 6x^2 - 6x$.

9. a) $11\frac{1}{5}\pi$ kub. v.; b) $\frac{10\pi}{3}$ kub. v.; c) $\frac{\pi^2+2\pi}{8}$ kub. v.

K10. TIKIMYBĖS

1 variantas

1. a) $X(e_1) = X(e_2) = 1$, $X(e_3) = X(e_4) = 3$, $X(e_5) = X(e_6) = 5$;

b) $X(e_1) = X(e_2) = X(e_3) = 2$, $X(e_4) = 3$, $X(e_5) = 4$, $X(e_6) = 5$.

2. 1) (1; 1), ..., (1; 6), (2; 1), ..., (2; 6), (3; 1), ..., (3; 6), (4; 1), ..., (4; 6), (5, 1), ..., (5; 6), (6; 1), ..., (6; 6); 2) $X = \{0; 10; 100\}$;

3) $X(6; 6) = 100$, $X(1; 6) = X(2; 6) = X(3; 6) = X(4; 6) = X(5; 6) = X(6; 1) = X(6; 2) = X(6; 3) = X(6; 4) = X(6; 5) = 10$,

$X(1; 1) = \cdots = X(1; 5) = X(2; 1) = \cdots = X(2; 5) = X(3; 1) = \cdots = X(3; 5) = X(4; 1) = \cdots = X(4; 5) = X(5; 1) = \cdots = X(5; 5) = 0$;

4)

Atsitiktinio dydžio X reikšmės	0	10	100
X reikšmių tikimybės	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

3. $e_1 = (1; 2)$, $e_2 = (1; 3)$, $e_3 = (1; 4)$, $e_4 = (2; 1)$, $e_5 = (2; 3)$, $e_6 = (2; 4)$,
$e_7 = (3; 1)$, $e_8 = (3; 2)$, $e_9 = (3; 4)$, $e_{10} = (4; 1)$, $e_{11} = (4; 2)$, $e_{12} = (4; 3)$;

1) $E = \{e_1; e_2; ...; e_{12}\}$;

2) $X(e_1) = X(e_2) = X(e_3) = X(e_4) = X(e_7) = X(e_{10}) = 1$,
$X(e_5) = X(e_6) = X(e_8) = X(e_{11}) = 2$, $X(e_9) = X(e_{12}) = 3$;
$Y(e_1) = Y(e_4) = 2$, $Y(e_2) = Y(e_5) = Y(e_7) = Y(e_8) = 3$,
$Y(e_3) = Y(e_6) = Y(e_9) = Y(e_{10}) = Y(e_{11}) = Y(e_{12}) = 4$;

3)

$m =$	1	2	3
$\mathbf{P}(X = m) =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$m =$	2	3	4
$\mathbf{P}(Y = m) =$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

4)

$(X, Y) =$	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(2, 3)	(2, 4)	(3, 4)
$\mathbf{P}(X, Y) =$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

5) Dydžiai X ir Y yra priklausomi.

4. a) $p = 0{,}08$; b) $p = \frac{2}{9}$.

5. a) $\frac{9}{2048}$; b) $\frac{135}{1024}$; c) $\frac{729}{4096}$.

6. a) $\frac{112}{243}$; b) $\frac{51}{243}$.

7. a)

$m =$	0	1	5	10	50
$\mathbf{P}(X = m) =$	$\frac{16}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{100}$

$\mathbf{E}X = 1{,}7$, $\mathbf{D}X = 29{,}81$; b) $\mathbf{M}X \approx 2{,}73$, $\sqrt{\mathbf{D}X} \approx 1{,}24$; c) $\mathbf{E}X = 5\frac{1}{3}$.

8. $\frac{3}{5}$.

2 variantas

1. a) $X(e_1) = X(e_2) = 2$, $X(e_3) = 3$, $X(e_4) = 4$, $X(e_5) = X(e_6) = 5$;

b) $X(e_1) = X(e_2) = 2$, $X(e_3) = X(e_4) = 4$, $X(e_5) = X(e_6) = 5$.

2. $e_1 = (q)$, $e_2 = (p, q)$, $e_3 = (p, p, q)$, $e_4 = (p, p, p)$; čia p — pataikė, q — nepataikė;

1) $E = \{e_1; e_2; e_3; e_4\}$; 2) $X(e_1) = 0$, $X(e_2) = 1$, $X(e_3) = 2$, $X(e_4) = 3$;

3)

Atsitiktinio dydžio X reikšmės	0	1	2	3
X reikšmių tikimybės	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

3. $e_1 = (1; 2)$, $e_2 = (1; 3)$, $e_3 = (2; 1)$, $e_4 = (2; 3)$, $e_5 = (3; 1)$, $e_6 = (3; 2)$;
1) $E = \{e_1; e_2; e_3; e_4; e_5; e_6\}$; 2) $X(e_1) = X(e_2) = X(e_3) = X(e_5) = 1$, $X(e_4) = X(e_6) = 2$; $Y(e_1) = Y(e_3) = 2$, $Y(e_2) = Y(e_4) = Y(e_5) = Y(e_6) = 3$;

3)

$m =$	1	2
$\mathbf{P}(X = m) =$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

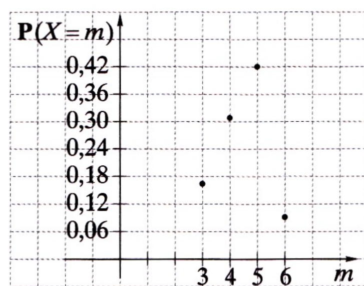
$m =$	2	3
$\mathbf{P}(Y = m) =$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

4)

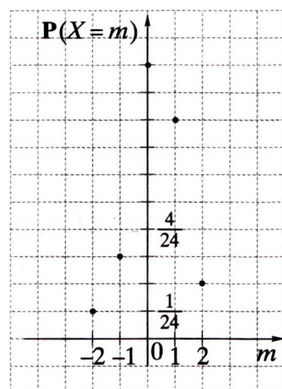
Y \ X	1	2
2	$\frac{1}{3}$	0
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

5) $\mathbf{P}(X = 1, Y = 2) \neq \mathbf{P}(X = 1) \cdot \mathbf{P}(Y = 2)$, tai dydžiai priklausomi.

4. a) $p = 0,1$;



b) $p = \frac{1}{12}$;



5. a) $\mathbf{P}(X = 4) = 0{,}24576$; b) $\mathbf{P}(X = 3) = 0{,}08192$.

6. a) 1) $\mathbf{P}(X = 2) \approx 0{,}12317$; b) $\mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 1) + \mathbf{P}(X = 2) \approx 0{,}9785$.

7. a)

$m =$	0	1	5	20	50
$\mathbf{P}(X = m)$	$\frac{6}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{8}{100}$	$\frac{2}{100}$

$\mathbf{E}X = 3{,}3$, $\mathbf{D}X \approx 73{,}81$;

b) $\mathbf{M}X = 2{,}176$, $\mathbf{D}X = 1{,}3770$; $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{D}X} \approx 1{,}1735$;

c) $\mathbf{M}X = 5\frac{3}{7} \approx 5{,}43$.

7. $\mathbf{P}(\text{skaičius trijų kartotinis}) = \frac{1}{5}$.

TEV
KOKYBĖS GARANTIJA

Leidinys atitinka ŠMM patvirtintus standartus ir programas.
Leidinys atitinka matematikos vadovėlį.
Visi uždaviniai patikrinti ir perspręsti leidyklos specialistų.

Eglė Danielienė, Aldona Janulevičienė, Daiva Noreikienė
Matematikos kontroliniai darbai su sprendimais
11 KLASĖ 1 dalis

Eglė Danielienė, Aldona Janulevičienė, Daiva Noreikienė
Matematikos kontroliniai darbai su sprendimais
11 KLASĖ 2 dalis

Eglė Danielienė, Aldona Janulevičienė, Daiva Noreikienė
Matematikos kontroliniai darbai su sprendimais
12 KLASĖ 1 dalis

Eglė Danielienė, Aldona Janulevičienė, Daiva Noreikienė
Matematikos kontroliniai darbai su sprendimais
12 KLASĖ 2 dalis

ISBN 9955-680-49-0
9 789955 680499